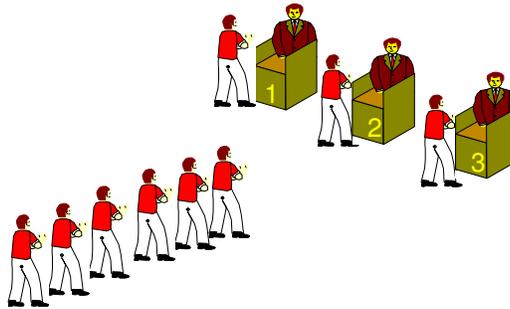
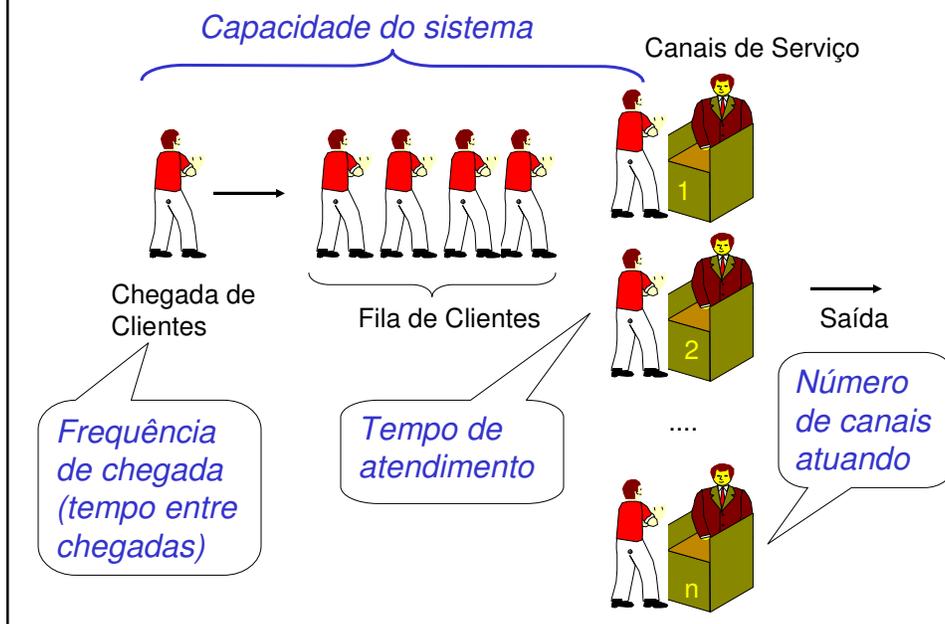


Simulação de Sistemas

Teoria das Filas



Estrutura do Sistema

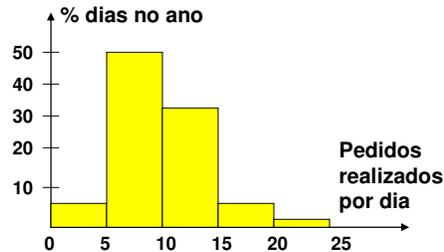


Processos Probabilísticos

Caracterizados por Distribuições Probabilísticas

Tabela relacionando os valores e as probabilidades que a variável tem de assumir estes valores.

Pedidos/dia	% dias
0 - 5	6
6 - 10	50
11 - 15	36
16 - 20	6
21 - 25	2



Passos para identificação da curva:

- 1) Fazer o levantamento estatístico (coleta / tabulação dos dados);
- 2) Montar a distribuição EMPÍRICA do processo;
- 3) Comparar a distribuição empírica com as TEÓRICAS, identificando a que melhor representa o processo.

Distribuições Probabilísticas

Distribuições Empíricas X Teóricas

EMPÍRICAS

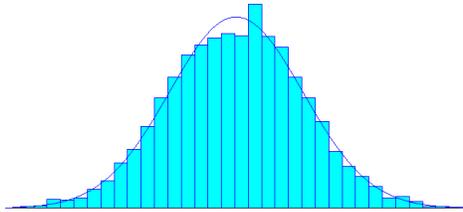
- 1) Construída com base na tabulação dos dados levantados;
- 2) Sem garantia de que esta tabulação represente a lei geral que rege o comportamento do sistema;
- 3) Válida para os dados levantados.

TEÓRICAS

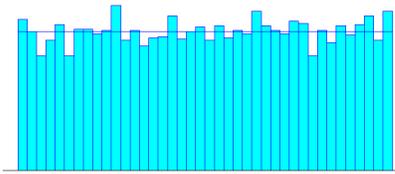
- 1) Processo foi estudado exhaustivamente;
- 2) Vários processos foram estudados e seu comportamento foi confirmado como semelhante;
- 3) Determinada uma "teoria matemática" para representá-lo. Essa teoria, expressa por uma equação matemática, é um *modelo matemático*.

Distribuições Probabilísticas

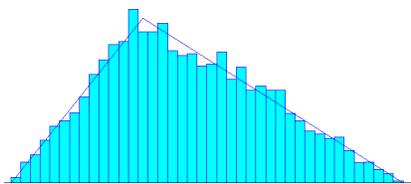
Exemplos:



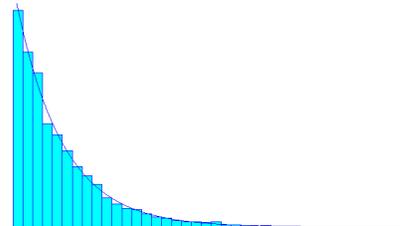
NORMAL



UNIFORME



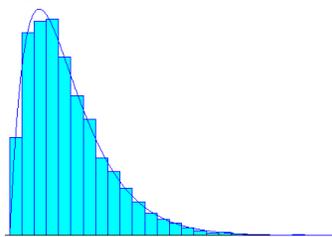
TRIANGULAR



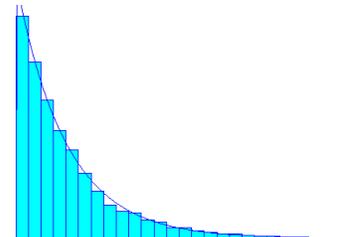
EXPONENCIAL

Distribuições Probabilísticas

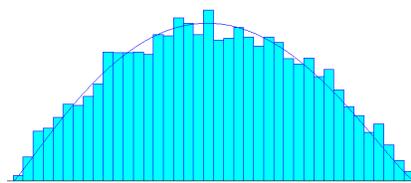
Exemplos:



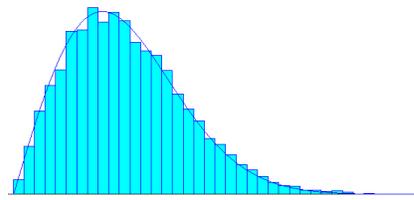
ERLANG



GAMMA



BETA



WEIBULL

entre outras...

Distribuições Probabilísticas

Teste de Aderência: Teste estatístico para determinar a curva **teórica** que se ajusta à curva **empírica** determinada.

Levantamento estatístico do **número de pedidos por dia** (em 120 dias):

Pedidos por dia	Frequência em dias	Frequência Relativa Real	Frequência Relativa Poisson
8	2	0.0167	0.0190
9	4	0.0333	0.0330
10	6	0.0500	0.0480
11	8	0.0667	0.0670
12	10	0.0833	0.0830
13	12	0.1000	0.0950
14	13	0.1083	0.1030
15	14	0.1167	0.1020
16	12	0.1000	0.0960
17	10	0.0833	0.0850
18	9	0.0750	0.0700
19	7	0.0583	0.0560
20	5	0.0417	0.0420
21	3	0.0250	0.0300
22	2	0.0167	0.0200
23	2	0.0167	0.0140
24	1	0.0083	0.0080

Freq. Relativa Real (Empírica)

$$2/120 = 0.0167$$

$$4/120 = 0.0333$$

...

Cálculo da média:

$$\lambda = 1802/120 = 15$$

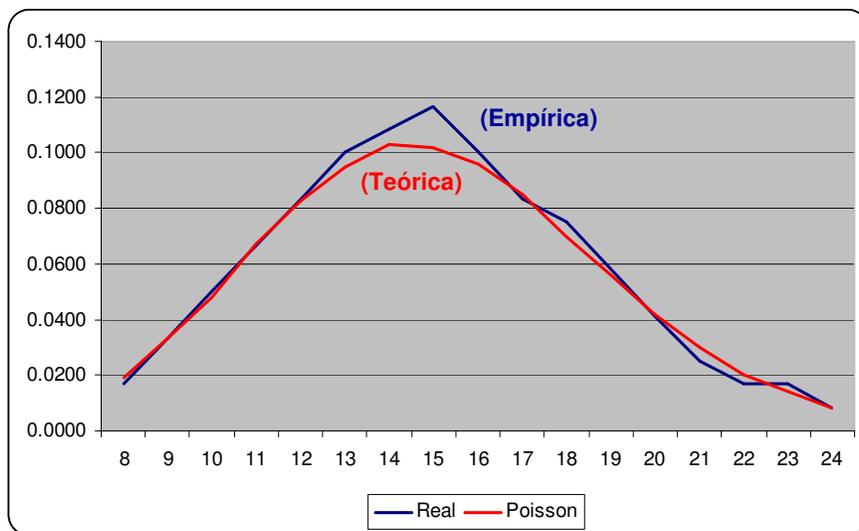
Freq. Relativa Poisson (Teórica)

$$p(x) = (e^{-\lambda} \cdot \lambda^x) / x!$$

$$p(8) = (e^{-15} \cdot 15^8) / 8! = 0.019$$

Total de 1802 pedidos

Distribuições Probabilísticas



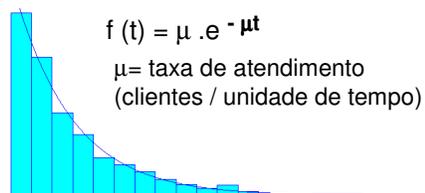
Distribuições Probabilísticas

Distribuições Teóricas Válidas para Aplicação em Teoria das Filas

Exponencial

Normalmente usada para representar tempos de atendimento.

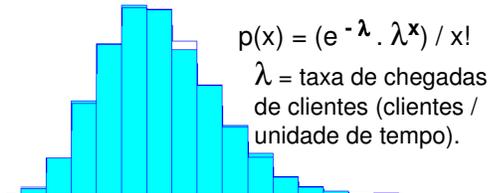
Distribuição contínua.



Poisson

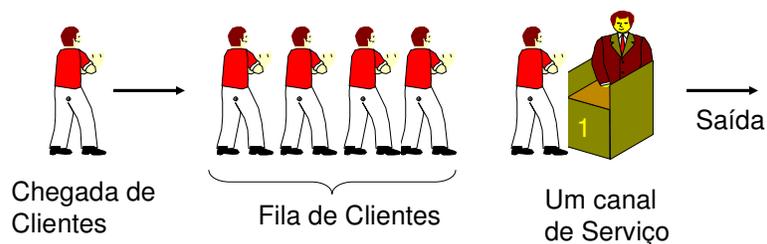
Usada normalmente para representar chegadas de clientes ao sistema e tempos de atendimento.

Distribuição discreta.



Estrutura do Sistema M / M / 1

1) Modelo Básico: M / M / 1 (1 fila, 1 canal)



Premissas:

- Chegadas se processam segundo distribuição Poisson com média λ chegadas/tempo;
- Tempos de atendimento seguem distribuição Poisson de média μ ;
- Ordem de atendimento da fila do tipo FIFO;
- Número de clientes infinito.

Estrutura do Sistema M / M / 1

Equações Básicas do modelo M / M / 1

1) Probabilidade de haver "n" clientes no sistema

$$P(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} \right)$$

2) Probabilidade de que o número de clientes no sistema seja superior a um valor "r"

$$P(n > r) = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{r+1}$$

3) Probabilidade de que o sistema esteja ocioso.

$$P(n=0) = \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu} \right)$$

4) Probabilidade de que o sistema esteja ocupado.

$$P(n > 0) = \rho = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)$$

Também conhecido como "índice de congestionamento" ou "taxa de utilização".

Estrutura do Sistema M / M / 1

Equações Referentes à Quantidade de Clientes

5) Número médio de clientes no sistema (NS)

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

6) Número médio de clientes na fila (NF)

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad NF(F > 0) = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

Equações Referentes à Tempos

7) Tempo médio de espera na fila por cliente (TF).

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

8) Tempo médio gasto no sistema por cliente (TS).

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Estrutura do Sistema M / M / 1

Relacionamentos entre as equações:

Número médio de clientes na fila (NF) e tempo médio de espera em fila (TF):

$$NF = \lambda \cdot TF$$

Número médio de clientes no sistema (NS) e tempo médio gasto por cliente no sistema (TS):

$$NS = \lambda \cdot TS$$

Tempo médio de espera em fila e tempo médio gasto no sistema:

$$TF = TS - \frac{1}{\mu}$$

Número médio de clientes em fila e número médio de clientes no sistema:

$$NF = NS - \frac{\lambda}{\mu}$$

Aplicação - M / M / 1

Análise da equipe de apoio administrativo

Uma equipe de apoio processa os formulários de requisição de peças para a linha de produção. O processamento não deve sofrer atrasos, caso contrário, a produção será afetada.

- Decidiu-se analisar a equipe como um todo, e não seus membros individualmente, o que resulta em um sistema de fila única e um canal de atendimento;
- Os "clientes" são os formulários de requisição;
- Não há restrição quanto ao número de requisições, portanto a população é infinita;
- Os formulários são processados por ordem de chegada (FIFO);
- As chegadas de pedidos e frequência de atendimento seguem as curvas de Poisson ou Exponencial;
- Pode ser aplicado o sistema M / M / 1;

Aplicação - M / M / 1

Primeira etapa: levantamento estatístico

Levantamento estatístico do número de pedidos por dia (em 120 dias):

Pedidos por dia	Frequência em dias
8	2
9	4
10	6
11	8
12	10
13	12
14	13
15	14
16	12
17	10
18	9
19	7
20	5
21	3
22	2
23	2
24	1

Total de 1802 pedidos

Cálculo da média:

$$\lambda = 1802/120 = 15$$

Aplicação - M / M / 1

Levantamento estatístico do número de atendimentos por dia (em 120 dias):

Atend. por dia	Frequência em dias
12	2
13	2
14	3
15	5
16	6
17	8
18	9
19	11
20	12
21	13
22	10
23	9
24	8
25	6
26	5
27	5
28	3
29	2
30	1

Total de 2489 atendimentos

Cálculo da média:

$$\mu = 2489/120 = 21$$

Aplicação - M / M / 1

Segunda etapa: cálculo dos índices de desempenho

Como ambas as distribuições são do tipo Poisson, as equações podem ser aplicadas.

$$\rho = \lambda / \mu = 15 / 21 = 0,714 \quad 71\% \text{ de utilização}$$

$$NS = \lambda / (\mu - \lambda) = 15 / (21-15) = 2,5 \text{ pedidos na seção, em média}$$

$$NF = 1,78 \text{ pedidos em média esperando na fila}$$

$$TF = 0,12 \text{ dias, ou } 57,6 \text{ minutos em média de tempo de espera na fila} \\ (\text{considerando que um dia de trabalho tem 8 horas})$$

$$TS = 0,17 \text{ dias, ou } 81,6 \text{ minutos de tempo total na seção}$$

Conclusões: o sistema está bem dimensionado, já que a utilização do sistema está em 71%. O tempo de espera dentro da seção também é razoável para este trabalho (81,6 minutos).

Exercício

Dimensionamento do Caixa Eletrônico

Uma agência bancária deseja analisar o atendimento prestado pela única máquina de auto-atendimento disponível aos clientes.

Foram coletados os dados das tabelas ao lado. O objetivo é saber se a máquina fica ocupada em um nível maior do que 80%, o que provoca maior índice de manutenção. Neste caso, uma nova máquina será solicitada para a matriz

Clientes por dia	Frequência em dias	Atendim. por dia	Frequência em dias
8	1	12	2
9	3	13	4
10	5	14	6
11	9	15	6
12	10	16	9
13	11	17	11
14	9	18	10
15	7	19	7
16	3	20	3
17	2	21	2
18	1	22	1

OBS: Adotar Jornada de Trabalho de 8 horas/dia

Exercício

Cálculo da média da chegada de clientes:

Cientes por dia	Frequência em dias
8	1
9	3
10	5
11	9
12	10
13	11
14	9
15	7
16	3
17	2
18	1

Total de 61 dias

Exercício

Cálculo da média da chegada de clientes:

Cálculo da média (λ)

Cientes por dia	Frequência em dias	
8	x 1	= 8
9	x 3	= 27
10	x 5	= 50
11	x 9	= 99
12	x 10	= 120
13	x 11	= 143
14	x 9	= 126
15	x 7	= 105
16	x 3	= 48
17	x 2	= 34
18	x 1	= 18

$$\lambda = 778 / 61 = 12.75$$

Total de 778 clientes

Exercício

Cálculo da média de atendimentos por dia:

Atendim. por dia	Frequência em dias
12	2
13	4
14	6
15	6
16	9
17	11
18	10
19	7
20	3
21	2
22	1

Total de 61 dias

Exercício

Cálculo da média de atendimentos por dia:

Cálculo da média (μ)

Atendim. por dia	Frequência em dias
12	x 2
13	x 4
14	x 6
15	x 6
16	x 9
17	x 11
18	x 10
19	x 7
20	x 3
21	x 2
22	x 1

$$= 24$$

$$= 52$$

$$= 84$$

$$= 90$$

$$= 144$$

$$= 187$$

$$= 180$$

$$= 133$$

$$= 60$$

$$= 42$$

$$= 22$$

+

$$\mu = 1018 / 61 = 16.69$$

Total de 1018 atendim.

Exercício

Conclusões:

Considerando-se que os comportamentos seguem a curva de Poisson ou Exponencial:

$$\rho = \lambda / \mu = 12.75 / 16.69 = 0.76$$

76% de utilização

Conclui-se, portanto, que a agência não precisa de outra máquina de atendimento.