UNISUL - Universidade do Sul de Santa Catarina
Unidade Acadêmica Tecnologia
Pesquisa Operacional II

PESQUISA OPERACIONAL II

Prof^{o}. Ricardo Villarroel Dávalos, Dr. Eng.

Palhoça, Março de 2010

Sumário

1.0 TEORIA DAS FILAS

1.1 UMA INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional (PO) é uma ciência aplicada cujo objetivo é a melhoria da performance em organizações, ou seja, em sistemas produtivos usuários de recursos materiais, financeiros, humanos e ambientais (os chamados "meios de produção"). Ela trabalha através da formulação de modelos matemáticos a serem resolvidos com o auxílio de computadores, sendo feita em seguida a análise e a implementação das soluções obtidas. Dessa forma, a técnica é precedida pela modelagem e seus resultados são sujeitos à análise de sensibilidade.

A modelagem tem muito de arte e exige o desenvolvimento de uma capacidade (em grande parte não lógica) de interação com o problema, seus agentes e seu meio ambiente. O modelo matemático, que é uma simplificação, dificilmente pode levar em conta muitos aspectos não qualificáveis que aparecem no exame do problema e por isso a análise de sensibilidade deve ser realizada para avaliar o seu significado e a sua influência. Enfim, a implementação da decisão reata o contato com a realidade do problema e com o meio no qual ele se encontra inserido.

O campo de atuação da PO se estende da produção de matérias-primas e bens de consumo ao setor de serviços e às aplicações de interesse social como as relacionadas à saúde, à educação e à psico-sociologia, no que concerne a modelos organizacionais e descritivos. Esta multiplicidade de aplicações aponta para a necessidade de se evitar a estreiteza da especialização, o que levou a Área a adotar uma orientação metodológica, facultando a seus alunos, tanto como a seus docentes/pesquisadores, uma ampla gama de oportunidades em termos de novos problemas. Esta orientação foi adotada no trabalho didático associado à formação de mestres, resultando daí uma formação bastante eclética que procura abranger os diversos aspectos do mercado de trabalho no que se refere ao instrumental teórico.

A PO tem sido grandemente empregada em organizações governamentais (federais, estaduais e municipais), militares e de utilidade pública (como escolas, sindicatos, hospitais e bibliotecas). Torna-se cada vez mais comum seu emprego em áreas das mais variadas.

A seguir alguns dos problemas que têm sido resolvidos por técnicas particulares da PO:

- PROGRAMAÇÃO LINEAR: tem sido usada com sucesso na solução de problemas relativos à alocação de pessoal, mistura de materiais, distribuição, transporte, carteira de investimento.

- TEORIA DAS FILAS: tem tido aplicação na solução de problemas relativos a congestionamento de tráfego, máquinas de serviços sujeitas a quebra, determinação do nível de uma força de serviço, programação do tráfego aéreo, projetos de represas, programação de produção e operação de hospitais.

- SIMULAÇÃO: tem sido aplicada também com sucesso a áreas como programação de produção, transportes, negócios, comunicações, bancos, escritórios, supermercados, redes de computadores, etc.

Outras técnicas de pesquisa operacional, tais como teoria de estoque, teoria dos jogos e programação dinâmica, também têm sido aplicadas com sucesso a diversos contextos.

1.2 ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DAS FILAS

A teoria das filas é um método analítico que aborda o assunto por meio de formulas matemáticas. Já a simulação é uma técnica que, usando o computador digital, procura montar um modelo que melhor represente o sistema em estudo.

A abordagem matemática de filas se iniciou no princípio do Século XX (1908) em Copenhague, Dinamarca, com A. K. Erlang, considerado o pai da Teoria das Filas, quando trabalhava em uma companhia telefônica . Foi somente a partir da segunda guerra mundial que a teoria foi aplicada a outros problemas de filas. Apesar do enorme progresso alcançado pela teoria, inúmeros problemas não são adequadamente resolvidos por causa de complexidades matemáticas (PRADO, 2004).

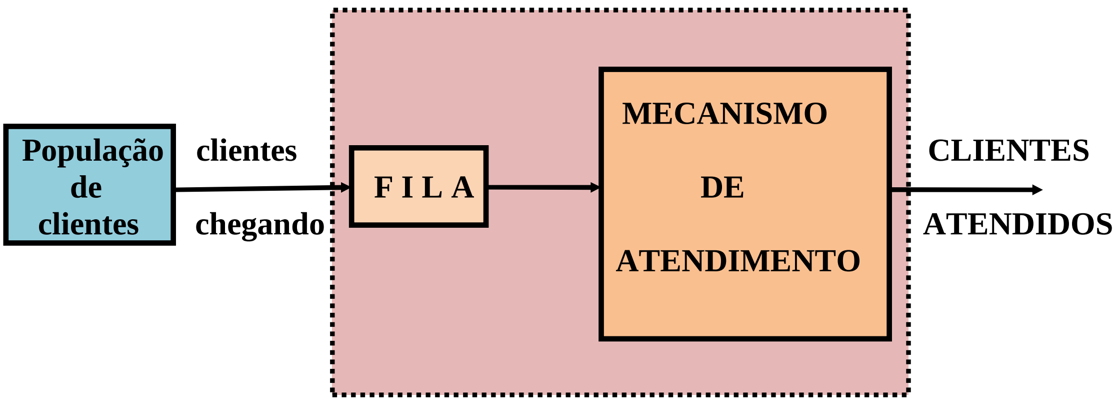
A teoria das filas envolve o estudo matemático das filas ou linhas de espera. A formação de filas excede a capacidade de fornecer aquele serviço. Os modelos matemáticos se tornam complexos porque normalmente utilizam ferramentas que envolvem um tratamento estatístico ou estocástico. Fornecer uma capacidade excessiva de atendimento gera ociosidade, fornecer um atendimento deficitário gera insatisfação, perda de clientes, perda de produção; tudo isto leva a uma relação muito forte entre as condições de um sistema de filas e a minização dos custos no atendimento do mesmo.

O estudo de sistemas de filas tem larga utilidade:

a) No planejamento e controle da produção.
b) No dimensionamento de sistemas de armazenamento.
c) Nos sistemas de transportes.
d) Nos sistemas de tráfego (rodo-porto-aéreo-ferroviário).
e) Na manutenção de máquinas.
f) em qualquer sistema em que seja provável a formação de filas para determinado atendimento.
g) Nos sistemas de saúde.
h) Sistemas comerciais.

A figura a seguir ilustra os elementos que compõem uma fila. Nela pode-se observar que uma certa **população**, surgem **clientes** que formam **fila** e que aguardam por um certo tipo de **serviço**. O termo cliente é usado de uma forma genérica e pode designar tanto uma pessoa, um navio ou um lingote. O **atendimento** é constituído de um ou mais **servidores** (que podem ser chamados de **atendentes** ou **canais de serviço**) e tanto pode designar um barbeiro, um vendedor ou uma máquina.

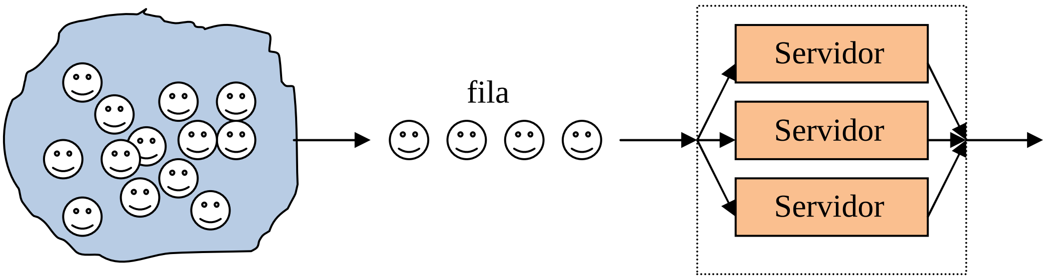
SISTEMA DE FILAS



Observações:

a) A população de clientes pode ser finito ou infinito;
b) Os clientes podem chegar um de cada vez ou em blocos;
c) A fila pode ter capacidade finita ou infinita;
d) O mecanismo de atendimento pode ter um posto ou vários, paralelos;
e) O sistema engloba os clientes da fila e os clientes em atendimento.

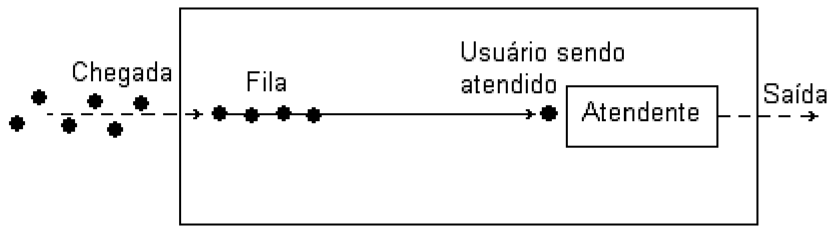
Em resumo, o esquema típico de um sistema de filas é ilustrado pela figura a seguir.



População de clientes

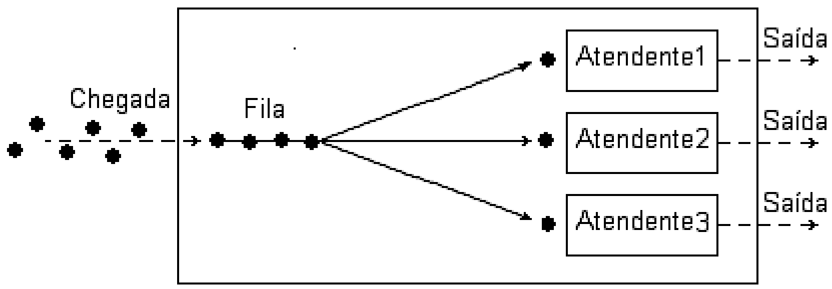
As figuras a seguir ilustram os tipos de atendimento em filas.

a)



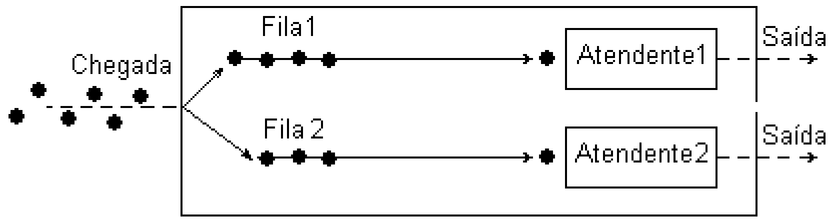
Fila única, atendente único

b)

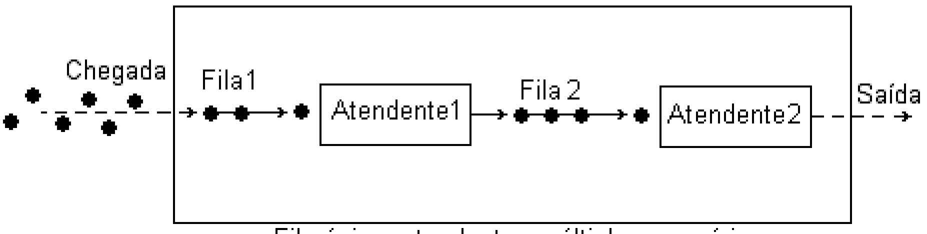


Fila única, atendentes múltiplos em paralelo

c)



Filas múltiplas, atendentes múltiplos em paralelo d)



Fila única, atendentes múltiplos em série

1.2 CARACTERÍSTICAS DE UMA FILA

Clientes e tamanho da população: Um cliente é proveniente de uma população. Quando uma população é muito grande, a chagada de um novo cliente a uma fila não afeta a taxa de chegada de clientes subseqüentes e conclui-se dizendo que as chegadas são independentes. Quando a população é pequena, o efeito existe e pode ser considerável.
População infinita => Chegadas independentes
População finita => Chegadas interdependentes

Processo de chegadas: Representa o ritmo de chegadas para a realização de uma atividade e para quantificar as variáveis randômicas (aleatórias) envolvidas podemos definir:

λ = Ritmo de chegada (exemplo: 4 clientes por minuto)
IC = Intervalo médio entre chegadas (exemplo: 12 segundos)

Não basta fornecer valores médios, é necessário também mostrar como os valores se distribuem em torno da média, i.e., qual distribuição de probabilidades rege o processo.
Um tipo raro de processo de chegada é o regular, ou seja aquele em que não existe nenhuma variação entre valores para os intervalos de chegada. Esta situação ocorre apenas em processos altamente automatizados

Processo de atendimento: Representa a realização da atividade e este processo é quantificado pelas variáveis randômicas (aleatórias) definidas a seguir:

μ = Ritmo de atendimento
TA = Tempo de atendimento

Número de servidores (c): Quantidade de servidores que atendem aos clientes.

Disciplinas das filas: Trata-se de uma regra que define qual o próximo a ser atendido e o comum é que o primeiro da fila é atendido ou, de uma maneira mais ampla, "o primeiro em chegar é o primeiro a ser atendido" (em inglês, diz-se **FIFO**: *First in, first out*). Outras disciplinas podem podem existir, tais como "último a chegar primeiro a ser atendido" (em inglês diz-se LIFO: Last in, first out), serviço por ordem de prioridade, serviço randômico (atendimento aleatório), etc. Portanto, uma característica do cliente pode definir sua prioridade de atendimento

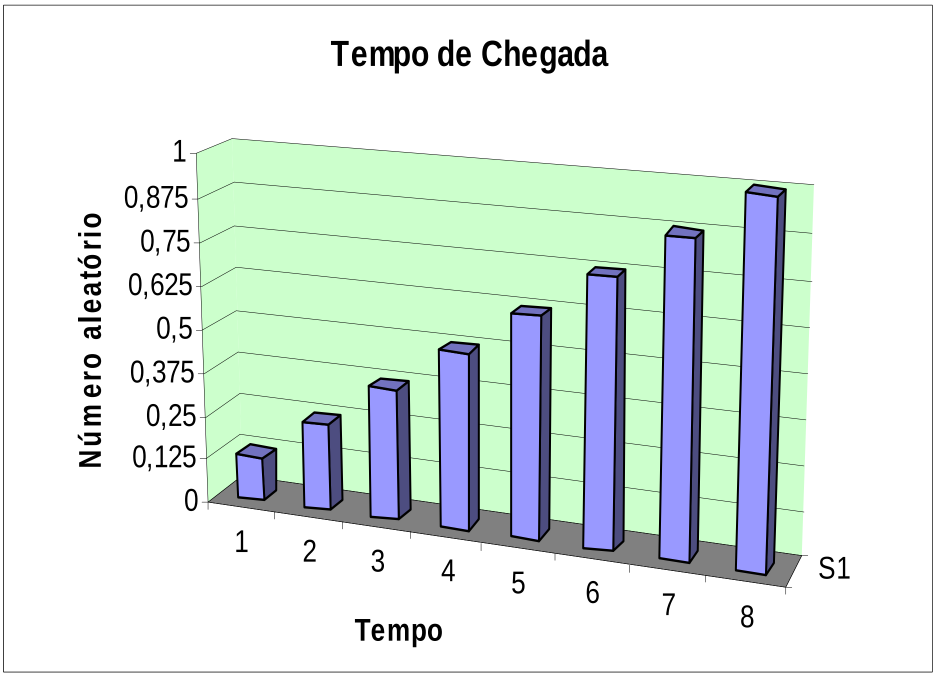
Tamanho médio e máximo da fila (TF): Quando os clientes devem esperar, alguma área de espera deve existir (por exemplo: as cadeiras de uma barbearia). O Tamanho Médio da Fila representa o número de clientes que esperam para ser atendidos ou a média que permanecem na fila.

Observa-se que, os diversos sistemas existentes são dimensionados para uma certa quantidade máxima de clientes em espera (Tamanho Máximo de Fila) e que se um novo cliente que chega ultrapassar esta quantidade máxima pode ser recusado, devendo tentar novamente em outro instante (exemplo: tentativa de conseguir linha telefônica).
Observa-se que se λ e μ são constantes => o tamanho da fila oscila em torno de um valor médio. Se $\mu < \lambda$ a fila aumentará indefinidamente.

Tempo médio de espera (TF): Esta é outra característica capaz de nos causar irritação quando estamos em uma fila de espera. Representa o tempo médio de espera na fila para ser atendido e também depende dos processos de chegada e atendimento:

$$TF = f(\lambda, \mu)$$

Variáveis aleatórias: Quando nos referimos a filas, utilizamos variáveis randômicas (aleatórias), assim para as principais variáveis existe um valor médio e uma distribuição de probabilidades. Como um exemplo, a figura a seguir ilustra o tempo de chegada que segue uma distribuição uniforme e ela pode ser encontrada mediante um número aleatório ou probabilidade definida.



Dinâmica de uma fila: Imagine-se agora comodamente instalado em uma poltrona dentro de um banco, com a finalidade de observar o funcionamento da fila formada por pessoas que desejam realizar o financiamento de um veículo.
<u>Chegada</u>
No período de media hora você verificou que chegaram ao sistema (banco) 12 pessoas. Os **intervalos entre chegadas**, a partir do instante zero, foram coletados em minutos e estes se encontram definidos na tabela a seguir.

Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Intervalo	2	3	3	3	5	0	1	5	1	4	1	2
Momento	3	6	9	12	17	17	18	23	24	28	29	31

A linha intervalo representa a freqüência de chegada dos clientes. A linha momento representa o instante de chegada do novo cliente, obtido a partir de acumulações da linha intervalo acrescido de 1 apenas no primeiro cliente, para significar o inicio do próximo intervalo de tempo. Assim o primeiro cliente chegou no início do 3^o minuto, o segundo a partir do 6^o sexto minuto. (marcado no relógio).
O valor médio dos intervalos acima é 2,5 minutos e, portanto, o sistema acima funcionou com um ritmo médio de 24 chegadas por hora. Ou seja:

λ = 24 clientes por hora

IC = 2,5 minutos

Atendimento
Por outro lado, os dados anotados para cada atendimento se encontram na tabela a seguir.

Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Duração	1	2	1	1	3	2	1	4	2	3	1	3

O valor médio dos dados acima é 2,0 minutos e, portanto, podemos dizer que o servidor tem uma capacidade de atender 30 clientes por hora.

μ = 30 clientes por hora

TA = 2,0 minutos

Tempo de espera de cada cliente
Finalmente o sistema funcionou conforme a tabela a seguir.

Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Intervalo	2	3	3	3	5	0	1	5	1	4	1	2
Momento	3	6	9	12	17	17	18	23	24	28	29	31
Duração	1	2	1	1	3	2	1	4	2	3	1	3
Tempo na fila	0	0	0	0	0	3	4	0	3	1	3	2

Veja que por exemplo o quinto cliente (vermelho) chegou ao banco no início do 17^o minuto e seu atendimento durou 3 minutos (portanto encerrou no final do 19^o minuto). O sexto cliente (roxo) chegou ao banco simultaneamente com o quinto cliente no 17^o minuto e, então, esperou na fila até completar o atendimento do quinto cliente (3 minutos), o que ocorreu no final 19^o minuto. Então no início do 20^o minuto, foi iniciado o atendimento do sexto cliente, que se estendeu até o final do 21^0 minuto. O sétimo cliente (cinca) chega no minuto 18^o e fica durante 4 minutos aguardando na fila, até ser atendido no minuto 22. A tabela a seguir ilustra esta dinâmica das filas.

Duração	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fila		1	1	1	1					
Fila	1	1	1							
Tempo	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Cliente	5	5	5	6	6	7	8	8	8	8

Podemos então concluir que:

- Total de clientes atendidos: 12
- Tempo Médio de Fila (TMF): (3+4+3+1+3+2)/12 = 16/12 = 1,33 minutos

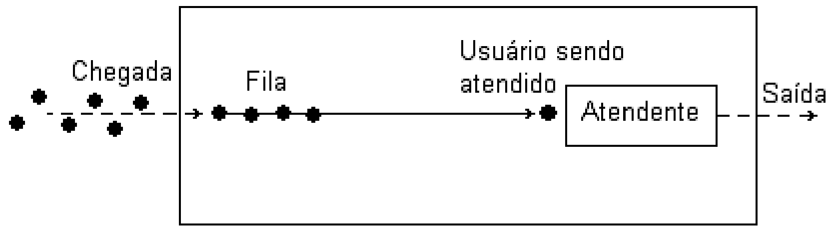
Sistemas estáveis: Sistema estável é aquele em que λ e μ se mantêm constantes ao longo do tempo. Se λ e μ são estáveis, a análise do comportamento do sistema pela teoria das filas só é possível se retalharmos o período de tempo, o que torna a análise muito mais complexa.

Tamanho da amostra:
Um estudo sobre um sistema estável, apresentará sempre os mesmos resultados desde que adequadamente analisado. O tamanho da amostra é fundamental.

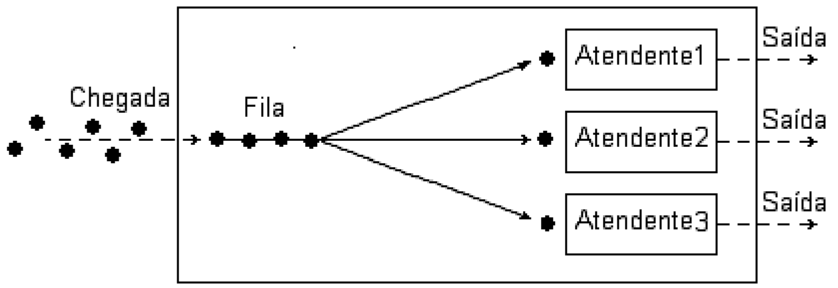
Tipos de filas:

- 1 fila e 1 servidor
- 1 fila e n servidores
- m filas e n servidores
- filas especiais (ex: caixas expressos de supermercados)
- filas que seguem uma alteração dinâmica do sistema de atendimento

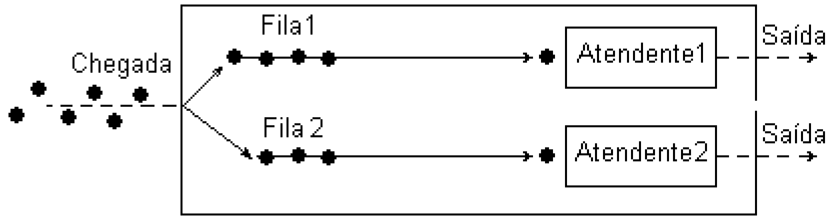
A seguir algumas representações destes tipos de filas.



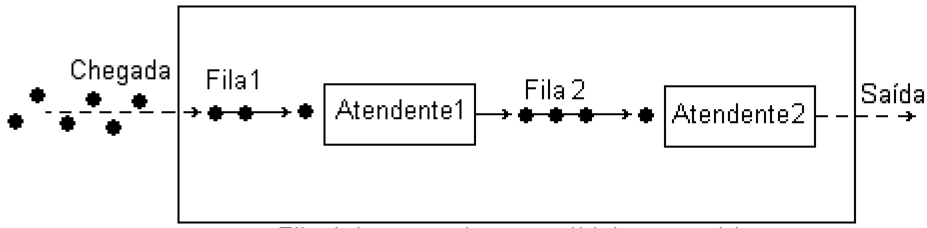
Fila única, atendente único



Fila única, atendentes múltiplos em paralelo



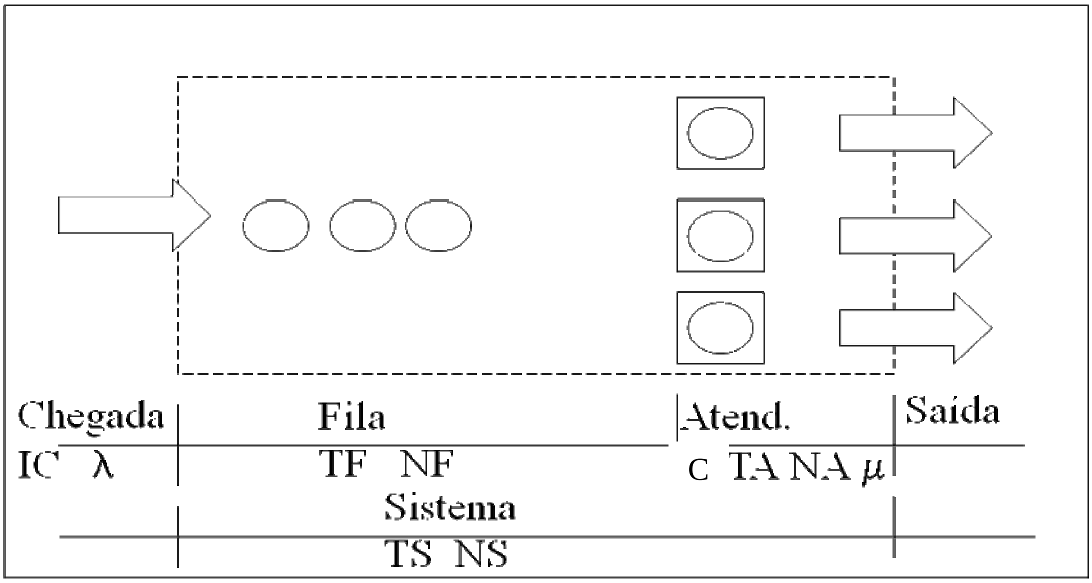
Filas múltiplas, atendentes múltiplos em paralelo



Fila única, atendentes múltiplos em série

1.3 LOCALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS RANDÔMICAS (ALEATÓRIAS)

A seguir a localização das variáveis considerando o sistema apresentado na figura, em situação estável, na qual clientes chegam e entram na fila e, existem c servidores para atendê-los.



Variáveis referentes ao Sistema

TS=Tempo Médio de Permanência no Sistema

NS=Numero Médio de Cliente no Sistema

Variáveis referentes ao Processo de Chegada

λ= ritmo médio de chegada

IC=intervalo médio entre chegadas

Por definição $IC=1/\lambda$

Variáveis referentes à Fila

TF=Tempo Médio de Atendimento ou de serviço

NF=Número Médio de Clientes na Fila

Variáveis Referentes ao Processo de Atendimento

TA=Tempo Médio de Atendimento ou de Serviço

c=Quantidade de atendentes

NA=Número Médio de Clientes que estão sendo atendidos

μ= ritmo médio de atendimento de cada atendente. Por definição: $TA= 1/\mu$

Relações básicas

NS = NF + NA (Número médio de clientes no sistema)

TS = TF + TA (Tempo médio de permanência no sistema)
Pode-se demonstrar também que: NA=λ/μ = TA/IC (número médio de clientes que estão sendo atendidos)
Portanto: NS=NF+NA=NF+λ/μ=NF+TA/IC

Taxa de Utilização dos Atendentes

Para o caso de "uma fila/um atendente"

$\rho=\lambda/\mu$

Para o caso de "uma fila/vários atendentes"

$\rho=\lambda/c\mu$, onde "c" é o número de atendentes

Intensidade de Tráfego ou Número mínimo de Atendentes

i= $|\lambda/\mu|$ = |TA/IC| onde:

i é o próximo valor inteiro (absoluto), que representa o número mínimo de atendentes necessário para atender a um dado fluxo de tráfego (exemplo: λ/μ = 2,5 → i = 3 "erlangs", em homenagem a A. K. Erlang).

Fórmulas de Little
J. D. C. Demonstrou que para um sistema estável de filas, temos:
NF = λ.TF
NS = λ.TS

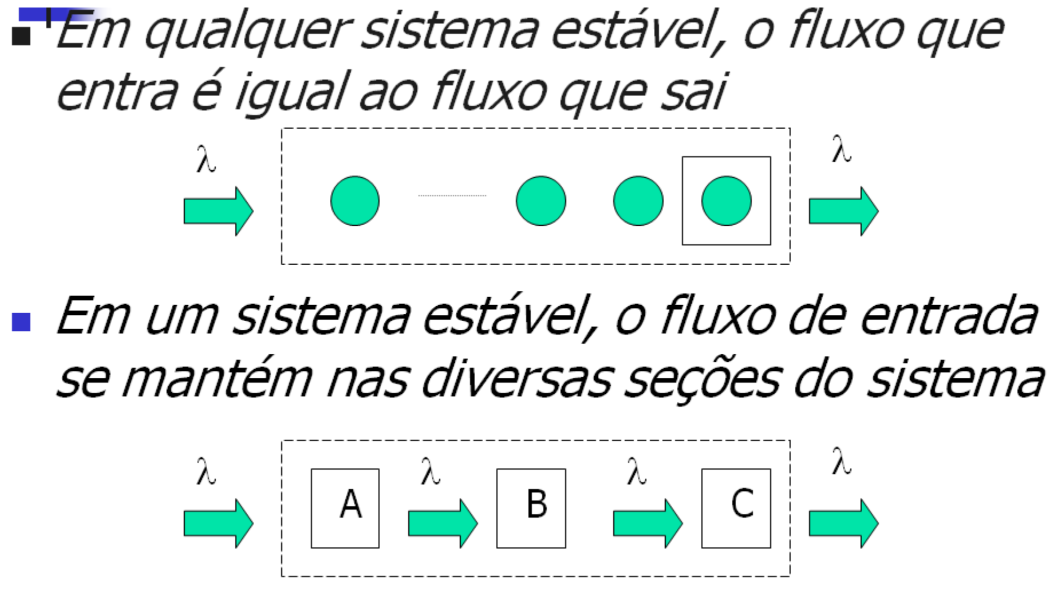
Resumo das Formulas

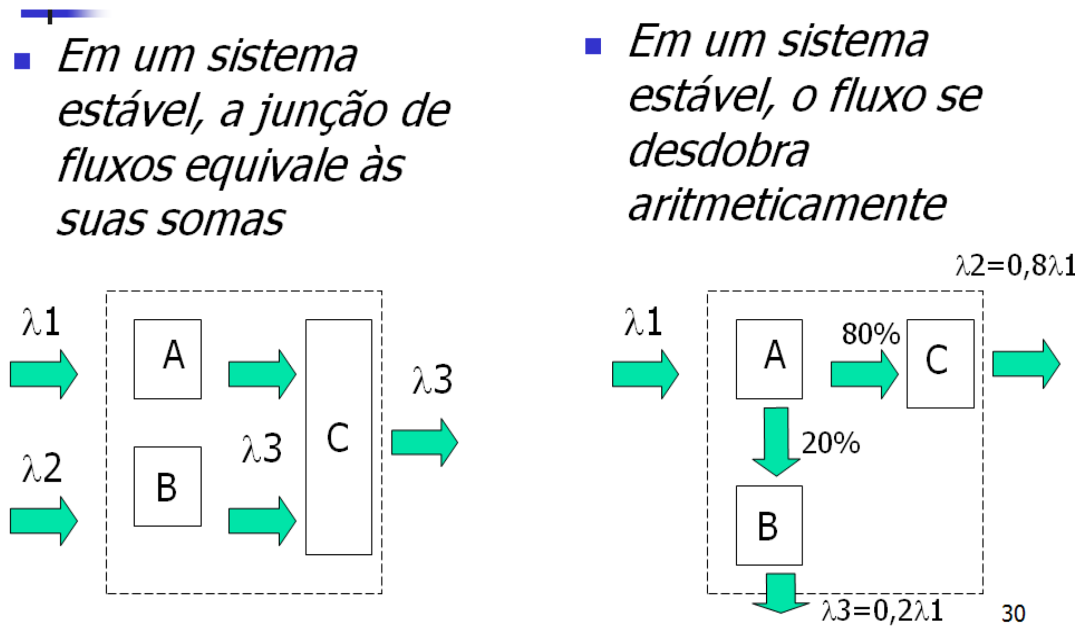
A tabela a seguir apresenta um resumo das formulas estudadas até agora.

Nome	Fórmula
Intervalo entre chegadas	IC=1/λ
Tempo de atendimento	TA= 1/μ
Taxa de utilização dos atendentes	$\rho=\lambda/c\mu$
Intensidade de tráfego	i= $|\lambda/\mu|$ = |TA/IC|
Relações entre fila, Sistema e atendimento	NS = NF + NA NA=λ/μ = TA/IC NS=NF+NA=NF+λ/μ=NF+TA/IC TS = TF + TA
Formulas de Little	NF = λ.TF NS = λ.TS

Postulados básicos

A seguir são apresentados alguns postulados básicos que se aplicam aos sistemas de filas, no qual existe estabilidade, ou seja, λ é menor que μ em todas as estações de trabalho.





Exemplo 1:

Em uma fábrica observou-se o funcionamento de um dado setor, em que λ=20 clientes por hora, μ=25 clientes por hora e TS = 0,3 hora. Pede-se o tamanho médio da fila.
Solução:

TA = 1/μ = 1/25 = 0.04 Horas
TF = TS – TA = 0,3 - 0,04 = 0,26 Horas
NF = λ*TF = 20*0,26 = 5,2 clientes

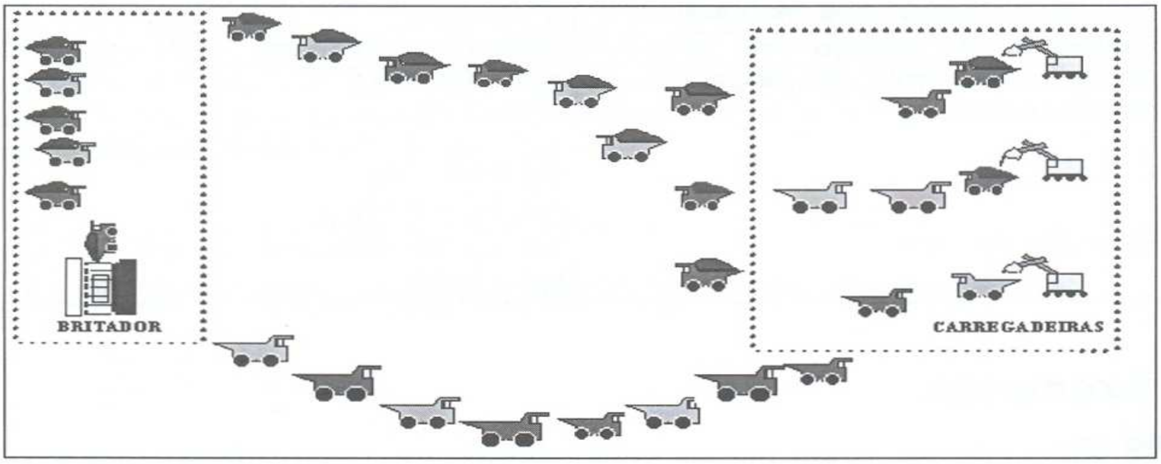
Exemplo 2:

Para o mesmo sistema acima, calcular NS e NA

Solução:

NS = λ*TF = 20*0,3 = 6 clientes
NA = NS – NF = 6 – 5,2 = 0,8 cliente

Exemplo 3:
Em uma mineração, cada caminhão efetua um ciclo onde é carregado de minério por uma das carregadeiras, desloca-se para o britador para o descarregamento e retorna às carregadeiras. Verificou-se que o tempo médio (TS) dos caminhões junto as carregadeiras é de 12 minutos e que, em média, existem 6 caminhões (NS) no setor. Qual a taxa de chegada de caminhões? (veja figura a seguir a ilustração dos caminhões na mineração).



Solução:

Considerando o espaço do britador como o sistema de estudo e pela lei de Little:

NS = λ.TS ou λ=NS/.TS
λ = 6/12 = 0,5 chegadas por minuto

1.4 O MODELO DE FILA M/M/1

A notação de Kendall (David Kendall) define os modelos de fila:

Modelo de fila **A/B/c/K/m/Z**

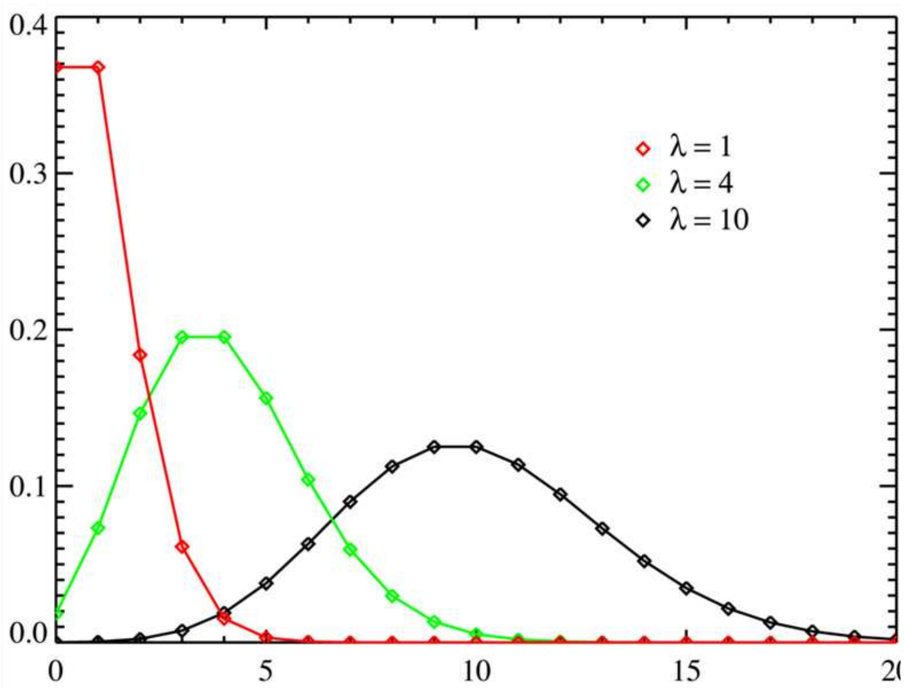
onde:

A = distribuição dos intervalos entre chegadas
B = distribuição dos tempo de serviço
c = quantidade de servidores (atendentes)
K = capacidade max. do sistema
m = tamanho da população
Z = disciplina da fila

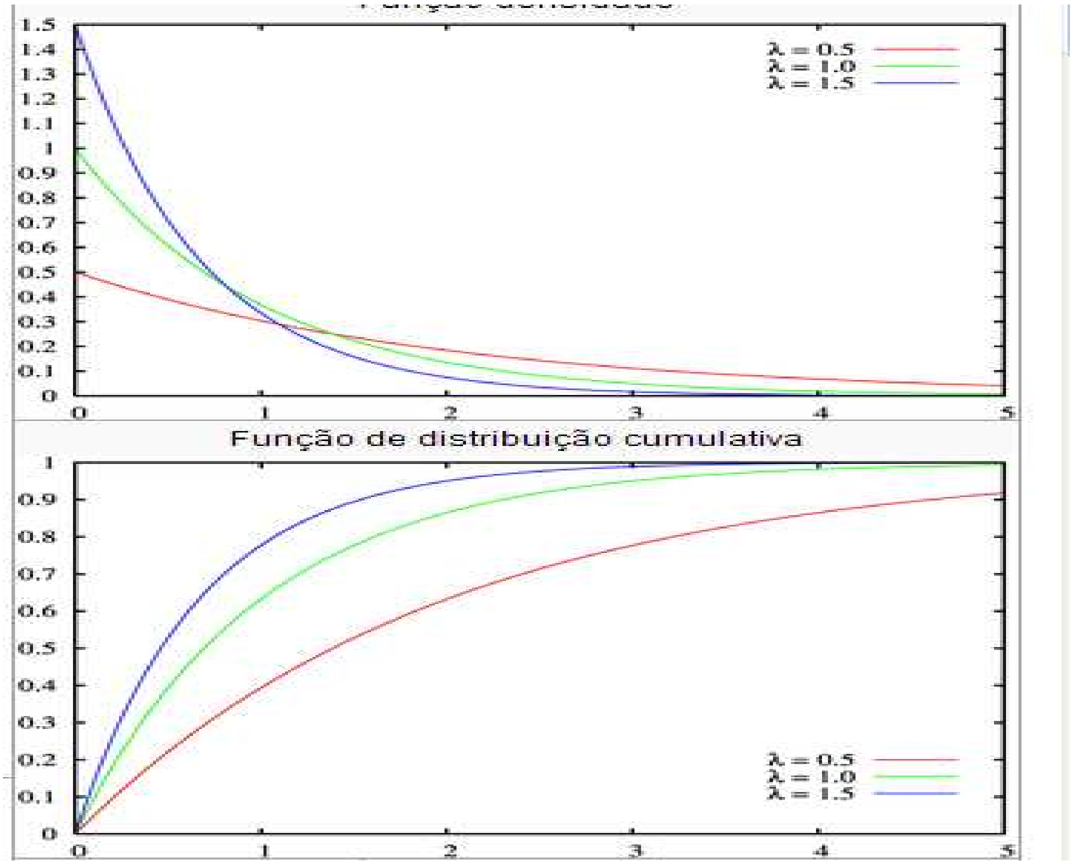
A notação condensada A/B/c é muito usada e se supõe que não há limite para o tamanho da fila, a população é infinita e a disciplina é FIFO. Para A e B, quando a distribuição for exponencial negativa, usa-se M (Marcoviana).

Modelo de fila que tanto as chegadas quanto o atendimento são marcovianos, i.e., seguem a distribuição de Poisson (p/ ritmos) ou Exponencial negativa (p/ intervalos). Além disso, existe apenas um servidor.

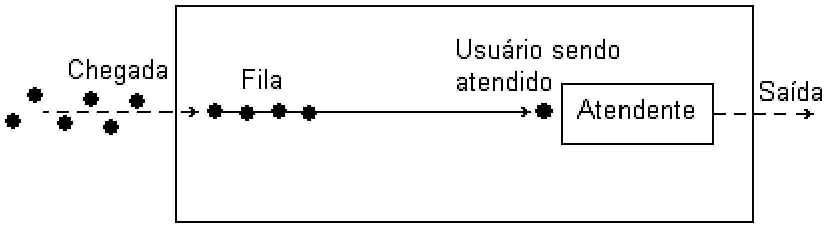
A seguir uma ilustração da função de distribuição de probabilidade Poisson que registra o número de ocorrências sobre um intervalo de tempo.



A seguir uma ilustração da função de distribuição de probabilidade Exponencial Negativa: Acima função densidade e abaixo função cumulativa.



Para um sistema que tem a estrutura da figura a seguir são válidas as definições estudadas anteriormente (λ, μ, IC, TA).



Fila única, atendente único

<u>População Infinita: O Modelo M/M/1</u>

Quando temos uma população infinita de clientes, as seguintes formulas tratam as principais variáveis.

1 – Nr. Médio de clientes na fila: $NF = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

2 – Nr. Médio de clientes no sistema: $NS = \dfrac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$

3 – Tempo médio que o cliente fica na fila: $TF = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

4 – Tempo médio que o cliente fica no sistema: $TS = \dfrac{1}{(\mu - \lambda)}$

5 – Probabilidade de existirem n clientes no sistema: $Pn = (1 - \lambda / \mu)(\lambda / \mu)^n$

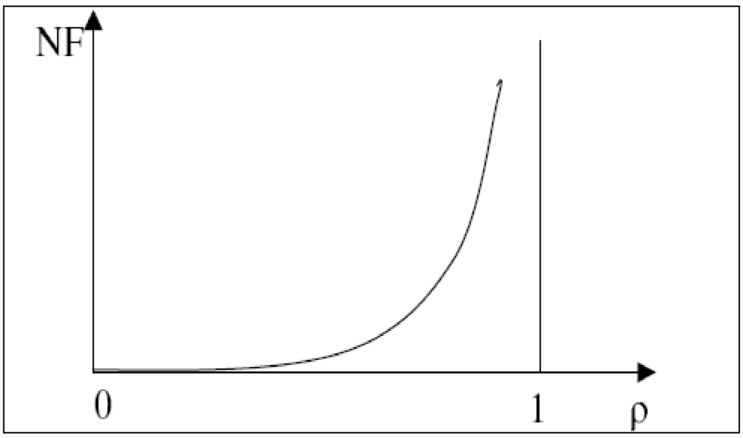
Chamamos de TAXA de UTILIZAÇÃO a relação entre o ritmo médio de chegada e o ritmo medo de atendimento.

$$\rho = \lambda / \mu$$

Conforme vimos anteriormente, sistemas estáveis exigem λ menor que λ ou $\rho < 1$. Quando ρ tende para 1 a fila tende a aumentar infinitamente, conforme mostramos a seguir.

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

A expressão anterior nos permite concluir facilmente que, se $\lambda = \mu$ temos $\rho = 1$ e o tamanho da fila é infinito, conforme ilustrado na figura a seguir..



Exemplo 1

Suponhamos que as chegadas a uma cabine telefônica obedeçam a lei de Poisson, com ritmo de 6 chegadas por hora. A duração média do telefonema é de 3 minutos e suponhamos que siga a distribuição exponencial negativa. Pede-se:

a) Qual a probabilidade de uma pessoa chegar à cabine e não ter que esperar?

Pelos dados temos: λ=6 chegadas hora. Portanto IC = 10 minutos

TA = 3 minutos. Portanto μ= 20 atendimentos/ hora

$P_o = 1 - \lambda/\mu = 1 - 6/20 = 0,7$

Ou seja, existe uma probabilidade de 70% de que uma pessoa, ao chegar, não encontre ninguém no sistema e possa utilizar imediatamente o telefone. O complemento deste valo (30%) significa a probabilidade de uma pessoa esperar. Assim o telefone fica ocupado 30% do tempo e fica 70% do tempo ocioso.

b) Qual o número médio de pessoas na fila?

$NF = \lambda^2 / \mu(\mu-\lambda) = (6*6)/(20(20-6)) = 0,128$

c) Qual o número médio de pessoas no sistema?

$NS = \lambda(\mu-\lambda) = 0,428$

d) Qual o número médio de clientes usando o telefone?

$NA = NS - NF = 0,48 - 0,128 = 0,3$

e) Qual o tempo médio de fila?

$TF = \lambda / \mu(\mu-\lambda) = 6/20(20-6) = 0,021$ hora = 1,28 minutos

f) Para qual ritmo de chegada teríamos a situação em que o tempo médio de espera na fila seria de 3 minutos?

$TF = \lambda / \mu(\mu-\lambda)$, para TF = 3 minutos ou TF = 0,05 hora e mantendo o mesmo μ= 20 clientes hora, temos: $\lambda = TF^* \mu^2 / (1+ \mu^*TF) = 10$ chegadas/hora

g) Qual a fração do dia durante a qual o telefone está em uso?

A fração do dia durante a qual o telefone está em uso é exatamente igual a (1-Po), isto é, a probabilidade de que existam pessoas no sistema. Conforme calculado no primeiro item este valor é 30%.

Exemplo 2

Uma fábrica possui um depósito de ferramentas onde os operários vão receber as ferramentas especiais para a realização de uma determinada tarefa. Verificou-se que o ritmo de chegada (λ = 1 chegada/minuto) e o ritmo de atendimento(μ=1,2 atendimentos por minuto) seguem o modelo marcoviano M/M/1. A fábrica paga $9,00 por hora ao atendente e $18,00 ao operário.

Pede-se:

a) O custo horário de sistema

O custo horário do sistema é igual a soma do custo horário do atendente com o custo horário dos operários que, por ficarem no sistema (na fila sendo atendidos pelo servidor), não estão produzindo em seus postos de trabalho. Para calcularmos este último devemos conhecer o número médio de clientes no sistema (NS).

$$NS = \lambda/(\mu - \lambda) = 1/(1,2 - 1) = 5$$

Portanto: Custo horário = Custo atendente + Custo operários = 9 + 5* 18 = $ 99,00

b) A fração do dia em que o atendente não trabalha.

A fração do dia durante a qual o atendente não trabalha é igual ao valor da probabilidade de não existir nenhum operário no sistema:

$$P_o = 1 – \lambda/\mu = 0,16 \text{ ou } 16\%$$

Exemplo 3

Uma empresa deseja contratar um reparador para efetuar manutenção em suas máquinas, que estragam a um ritmo de 3 falhas por hora. Para tal possui duas opções: um reparador lento, que é capaz de consertar a um ritmo de 4 falhas por hora ou um reparador rápido, que é capaz de consertar a um ritmo médio de 6 falhas por hora. O salário/hora do reparador lento é $3,00 e do reparador rápido é $5,00. O custo de uma máquina parada é $5,00. Pede-se qual a contratação que deve ser efetuada para que o custo total (reparador mais máquinas paradas) seja mínimo?

Reparador Lento

$NS = \lambda/(\mu - \lambda) = 3/(4-3) = 3$ máquinas
Custo das máquinas = 3* 5 = $ 15,00
Custo do reparador = $ 3,00
Custo total = $ 18,00

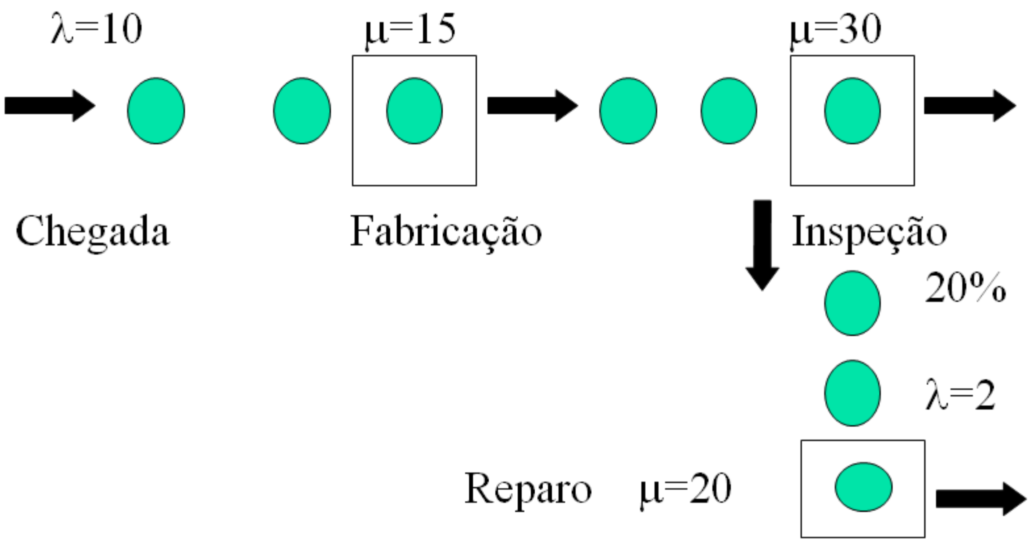
Reparador rápido

$NS = \lambda/(\mu - \lambda) = 3/(6-3) = 1$ máquinas
Custo das máquinas = 1* 5 = $ 5,00
Custo do reparador = $ 5,00
Custo total = $ 10,00

Comparando, vemos que o reparador rápido, apesar de ter um custo maior, implica um custo total menor.

Exemplo 4

Em um sistema de filas seqüenciais, conforme figura a seguir, calcule as filas que se formam em cada servidor.

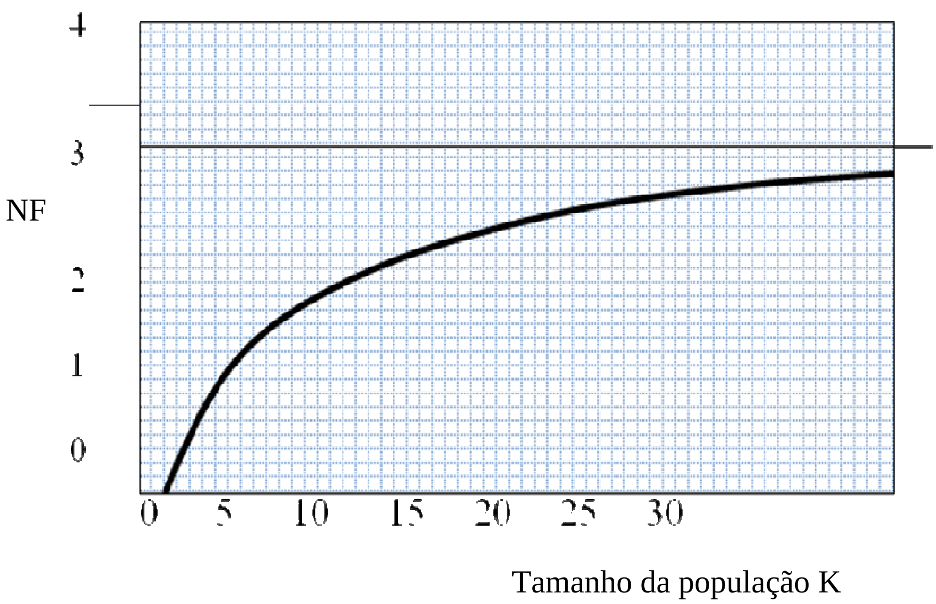


Fila	λ	μ	NF
Fabricação	10	15	1,54
Inspeção	10	30	0,17
Reparo	2	20	0,01

Para encontrar o NF foi utilizada $NF = \lambda^2 / \mu(\mu - \lambda)$

<u>População finita: O Modelo M/M/1/K</u>

Um caso particular e bastante encontrado na vida prática. Exemplo, uma mineração com 1 escavadeira e a alguns caminhões. Considerando $\lambda=8$ e $\mu=10$. Na seguinte figura é ilustrado o tamanho médio da fila (calculado pela primeira fórmula definida na tabela a seguir) em função do tamanho da população de caminhões (se a população fosse infinita, teríamos NF = 3,2).

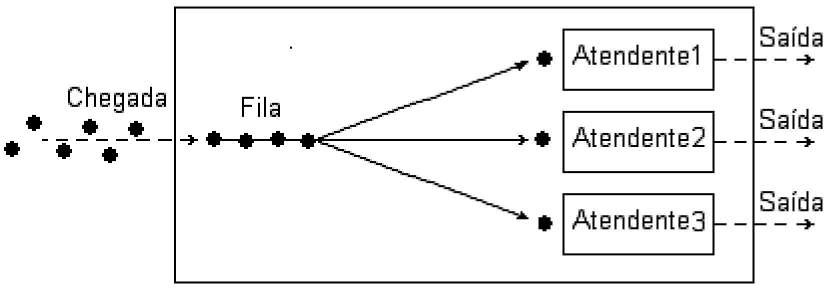


Na tabela a seguir, K representa a quantidade finita de clientes que estão percorrendo o sistema.

1 – Nr. Médio de clientes na fila:	$\mathbf{NF} = \mathbf{K} - \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda}.(1-\mathbf{P}_0)$
2 – Nr. Médio de clientes no sistema:	$\mathbf{NS} = \mathbf{K} - \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda}.(1-\mathbf{P}_0) + \frac{\lambda}{\mu}$
3 – Tempo médio que o cliente fica na fila:	$\mathbf{TF} = \frac{\mathbf{K}}{\lambda} - \frac{(\lambda+\mu).(1-\mathbf{P}_0)}{\lambda^2}$
4 – Tempo médio que o cliente fica no sistema:	$\mathbf{TS} = \frac{\mathbf{K}}{\lambda} - \frac{(\lambda+\mu).(1-\mathbf{P}_0)}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu}$
5 – Probabilidade de existirem n clientes no sistema:	$\mathbf{Pn} = \dfrac{(\frac{\mu}{\lambda})^{\mathbf{K-n}}}{(\mathbf{k}-\mathbf{n})!.\sum_{j=0}^{\mathbf{k}} \frac{(\frac{\mu}{\lambda})^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!}}$

1.5 O MODELO M/M/c

O modelo M/M/c apresenta uma única fila e diversos servidores e, tanto a chegada como o atendimento são marcovianos (isto é, seguem a Distribuição de Poisson ou da Distribuição Exponencial negativa). A figura a seguir ilustra a estrutura deste modelo.



Fila única, atendentes múltiplos em paralelo

Para um sistema que tem a estrutura da figura a anterior são válidas as definições estudadas anteriormente (λ, μ, IC = 1/λ, TA e c = capacidade de atendimento).

<u>População finita: O Modelo M/M/c</u>

As fórmulas para o modelo M/M/c são complexas e difíceis de serem manipuladas e, assim a preferência generalizada é pelo uso de gráficos. A seguir uma ilustração destes gráficos.

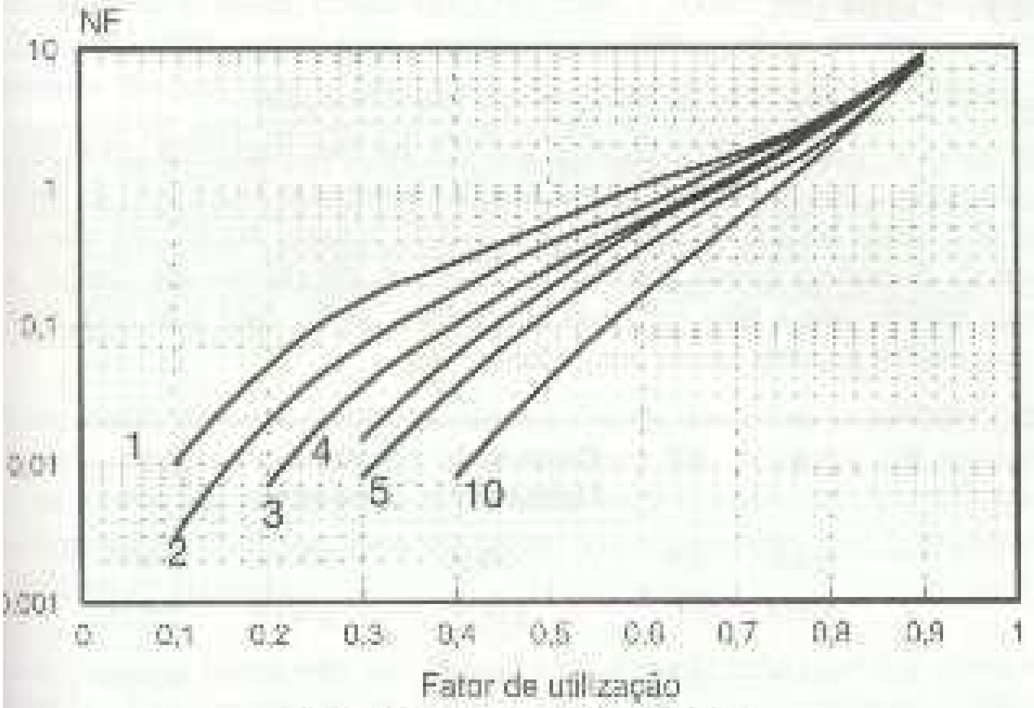


Figura 7.2 - NF versus ρ (ρ = λ / Mμ)

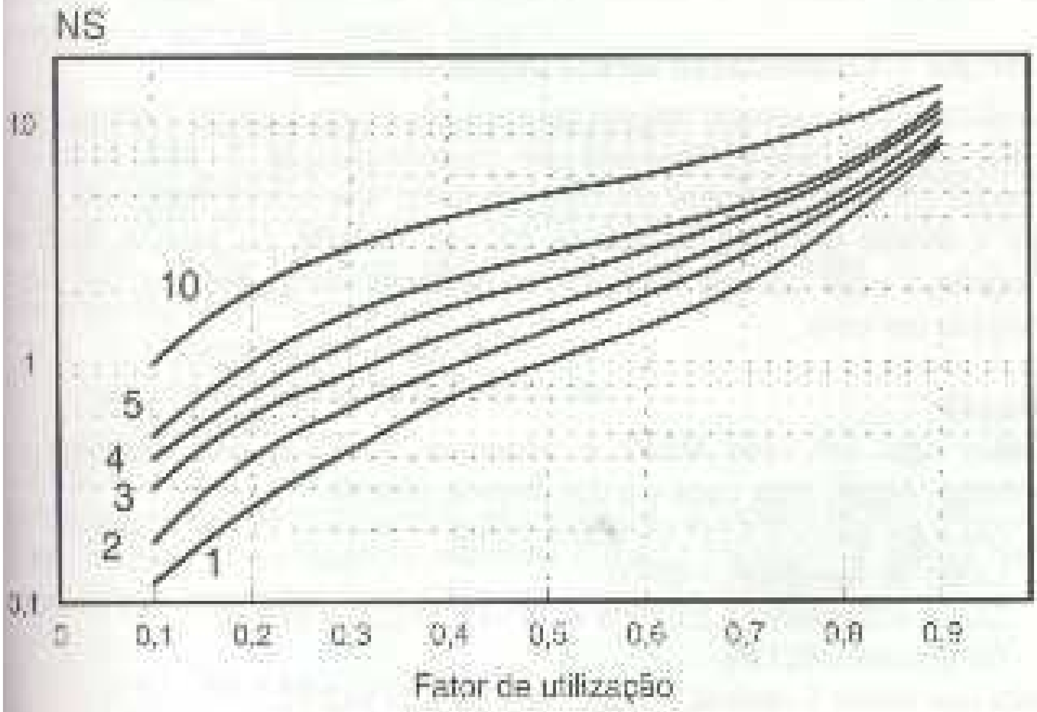


Figura 7.3 - NS versus ρ (ρ = λ / Mμ)

Geralmente são utilizados gráficos (como os ilustrados anteriormente) para se obter o número médio de clientes na fila (NF) em função do fator de utilização e tendo como parâmetro a quantidade de servidores “c”.
A taxa de utilização é: $\rho = \lambda/c\mu$

Após o uso dos gráficos, as outras variáveis podem ser obtidas pelas fórmulas de Little:

$$TF=NF/\lambda \quad e \quad TS=NS/\lambda$$

A tabela a seguir apresenta as fórmulas das diferentes variáveis.

Nome	Descrição	Fórmula
ρ	Taxa de utilização do sistema	$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$
r	Relação entre a taxa de chegada e a taxa de atendimento	$r = \frac{\lambda}{\mu}$
P_0	Probabilidade de nenhum usuário do sistema	$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{cr^c}{c!(c-r)} \right)^{-1}$
P_n	Probabilidade de n usuários no sistema	$P_n = P_0 \frac{r^n}{n!} \xrightarrow{se} 1 \leq n \leq c$ $P_n = P_0 \frac{r^n}{c^{n-c} c!} \xrightarrow{se} n \geq c$
L	Número médio de usuários no sistema	$L = r + \left[\frac{r^{c+1} c}{c!(c-r)^2} \right] P_0$
L_q	Número médio de usuários na fila	$L_q = \frac{P_0 c r^{c+1}}{c!(c-r)^2}$
W	Tempo médio de esperado sistema	$W = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{r^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} \right] P_0$
W_q	Tempo médio de espera na fila	$Wq = \frac{r^c \mu}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0$
W_q (t)	Função de probabilidade acumulada de tempo médio de espera na fila	$W_q(t) = 1 - P_0 \frac{r^c}{c!(1-\rho)} e^{-(c\mu-\lambda)t}$

Tabela 4 - Principais indicadores de desempenho do modelo M/M/c/∞/FIFO
Fonte: Sinay, (2005)

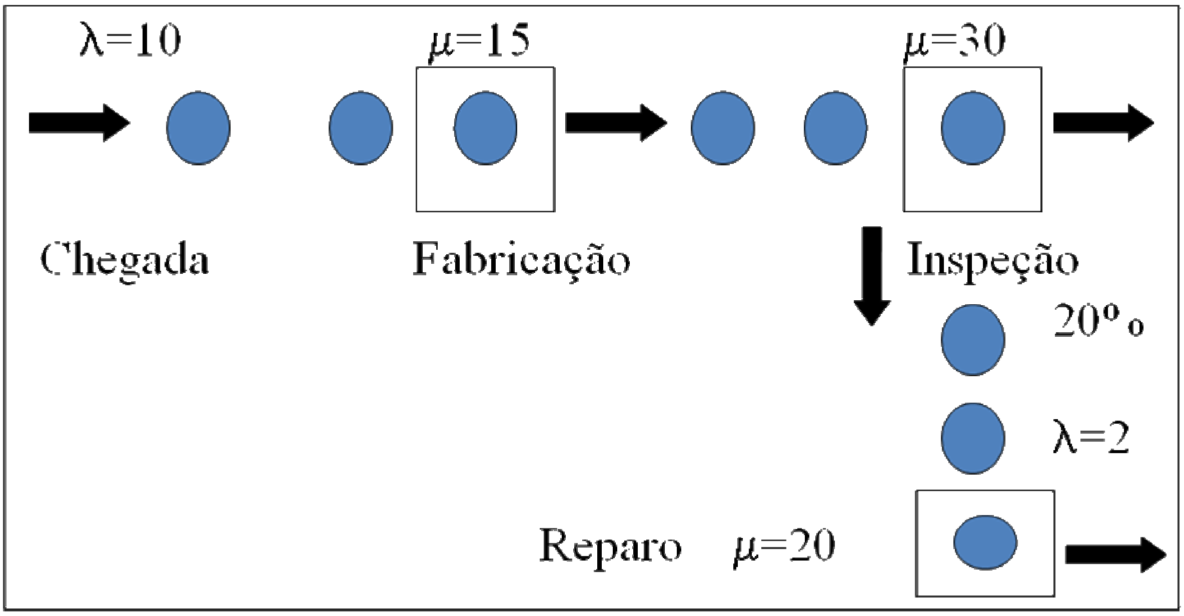
Exemplo 1

Uma fábrica possui um depósito de ferramentas onde os operários vão receber as ferramentas especiais para a realização de uma determinada tarefa. Verificou-se que o ritmo de chegada (λ = 1 chegada/minuto) e o ritmo de atendimento(μ=1,2 atendimentos por minuto) seguem o modelo marcoviano M/M/1. A fábrica paga $9,00 por hora ao atendente e $18,00 ao operário. Pede-se: O custo horário de sistema e a fração do dia em que o atendente não trabalha.
Este exemplo já foi solucionado anteriormente e o resultado que deu foi que o custo horário de um sistema com um atendente (λ=1 e μ=1,2), sendo $9,00 o custo horário do atendente e $18,00 o custo horário do operário parado. Podemos agora acrescentar diversos atendentes até chegar ao custo mínimo. Isto é feito na tabela montada a seguir, pelo qual deduzimos que a melhor escolha reside em 2 atendentes.

c	ρ	NS	Custo dos atendentes [$]	Custo dos operários [$]	Custo total [$]
1	0,833	5	9	90	99
2	0,417	1	18	18	36
3	0,277	0,7	27	12,6	39,6
4	0,208	0,6	36	10,8	46,8
5	0,167	0,59	45	10,62	55,62

Exemplo 2

No sistema de filas seqüenciais descrito na figura abaixo, admita que o ritmo de chegada tenha crescido para λ=25 peças por minuto, calcule a quantidade de servidores de cada estação de trabalho tal que o tamanho da fila correspondente (NF) seja menor que 1.



C	Produção λ=25 e μ=15		Inspeção λ=25 e μ=30		Reparo λ=25 e μ=15	
	ρ	NF	P	NF	ρ	NF
1	-	-	0,83	4,16	0,25	0,09
2	0,83	3,5	0,41	0,2		
3	0,55	0,5				

Conclusão: A quantidade de servidores que atende à solicitação é:
Produção = 3; Inspeção 2 e Reparo = 1.

<u>População finita: O Modelo M/M/c/K</u>

Analogamente as considerações anteriores para a população finita com um único atendente, podemos afirmar que também aqui ocorre o mesmo: é comum encontrarmos situações de múltiplos atendentes com população finita.
A tabela a seguir apresenta as fórmulas das diferentes variáveis.

Nome	Descrição	Fórmula
ρ	Taxa de utilização do sistema	$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$
r	Relação entre a taxa de chegada e a taxa de atendimento	$r = \frac{\lambda}{\mu}$
P_0	Probabilidade de nenhum usuário do sistema	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c (K - c + 1)}{c!} \right]^{-1} \xrightarrow{se} \frac{r}{c} = 1$

		$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c \left[1 - \left(\frac{r}{c} \right)^{K-c+1} \right]}{c!(1-\frac{r}{c})} \right]^{-1} \xrightarrow{se} \frac{r}{c} \neq 1$
P_n	Probabilidade de n usuários no sistema	$P_n = P_0 \frac{r^n}{n!} \xrightarrow{se} 1 \leq n \leq c-1$ $P_n = P_0 \frac{r^n}{c^{n-c}c!} \xrightarrow{se} c \leq n \leq K$
L	Número médio de usuários no sistema	$L = Lq + c + \sum_{n=0}^{c-1} (n-c)P_n$
L_q	Número médio de usuários na fila	$L_q = \frac{P_0 r^c}{c!} \frac{(K-c+1)(K-c)}{2} \xrightarrow{se} \frac{r}{c} = 1$ $L_q = \frac{P_0 r^{c+1}}{c!c} \frac{\left[\left(\frac{r}{c} - 1 \right)(K-c+1)\left(\frac{r}{c} \right)^{K-c} + 1 - \left(\frac{r}{c} \right)^{K-c+1} \right]}{\left(1 - \left(\frac{r}{c} \right) \right)^2} \xrightarrow{se} \frac{r}{c} = 1$
W	Tempo médio de esperado sistema	$W = \frac{L}{\lambda(1-P_{K)}}$
W_q	Tempo médio de espera na fila	$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-P_{K)}}$

Tabela 5 - Principais indicadores de desempenho do modelo M/M/c/K/FIFO

Tendo em vista a complexidade matemática, não iremos nos estender nesta abordagem, a qual pode, entretanto, ser vista com simplicidade na técnica simulação de sistemas que será abordada no próximo capítulo.

REFERÊNCIAS

CHWIF, L.; MEDINA, A. **Modelagem e Simulação de Eventos Discretos: Teoria & Prática**, São Paulo: Bravarte, 2006.

FREITAS FILHO, P. J. **Introdução à modelagem e simulação de sistemas**, Florianópolis: Visual Books, 2008.

PRADO, S. H. **Teoria das filas e da Simulação**. Belo Horizonte: Desenvolvimento Gerencial, 2004.

SALIBY, E. **Repensando a simulação: A amostragem descritiva**. São Paulo: Atlas, 1989.