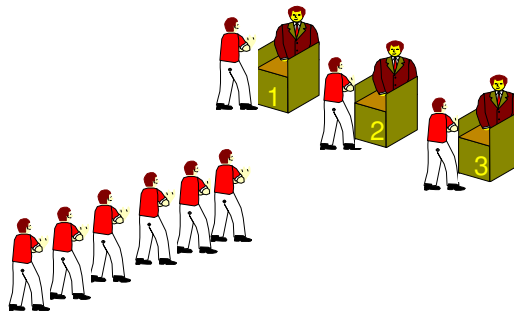
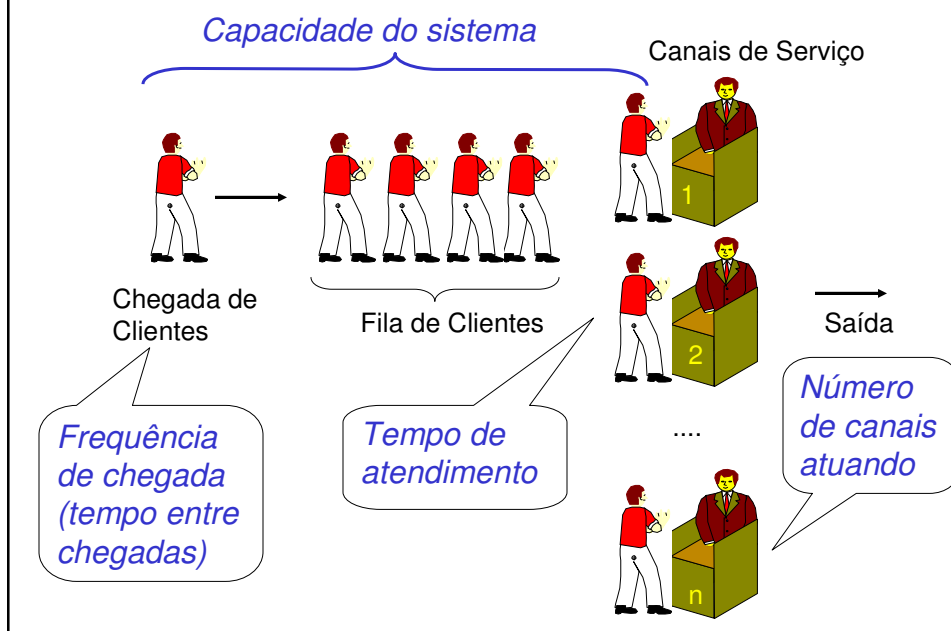


## Simulação de Sistemas

# Teoria das Filas



## Estrutura do Sistema

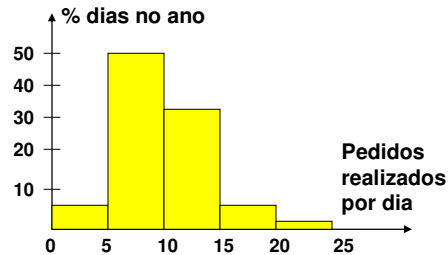


## Processos Probabilísticos

### Caracterizados por Distribuições Probabilísticas

Tabela relacionando os valores e as probabilidades que a variável tem de assumir estes valores.

Pedidos/dia	% dias
0 - 5	6
6 - 10	50
11 - 15	36
16 - 20	6
21 - 25	2



Passos para identificação da curva:

- 1) Fazer o levantamento estatístico (coleta / tabulação dos dados);
- 2) Montar a distribuição EMPÍRICA do processo;
- 3) Comparar a distribuição empírica com as TEÓRICAS, identificando a que melhor representa o processo.

## Distribuições Probabilísticas

### Distribuições Empíricas X Teóricas

#### EMPÍRICAS

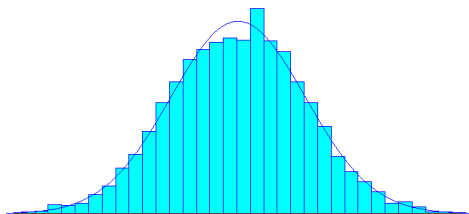
- 1) Construída com base na tabulação dos dados levantados;
- 2) Sem garantia de que esta tabulação represente a lei geral que rege o comportamento do sistema;
- 3) Válida para os dados levantados.

#### TEÓRICAS

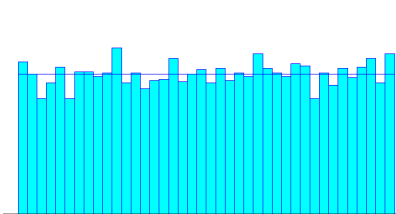
- 1) Processo foi estudado exhaustivamente;
- 2) Vários processos foram estudados e seu comportamento foi confirmado como semelhante;
- 3) Determinada uma "teoria matemática" para representá-lo. Essa teoria, expressa por uma equação matemática, é um *modelo matemático*.

## Distribuições Probabilísticas

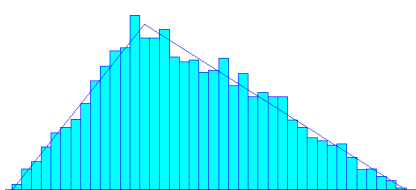
Exemplos:



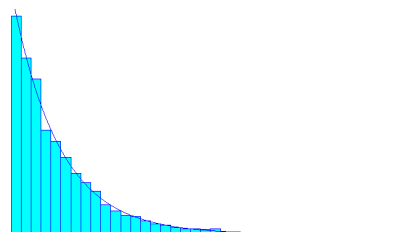
NORMAL



UNIFORME



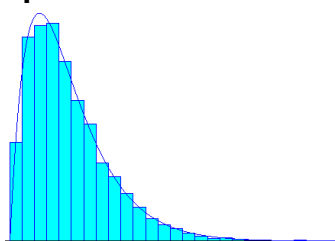
TRIANGULAR



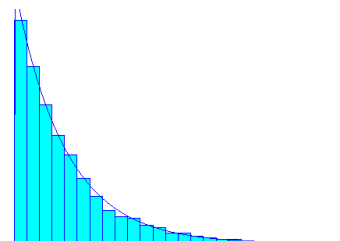
EXPONENCIAL

## Distribuições Probabilísticas

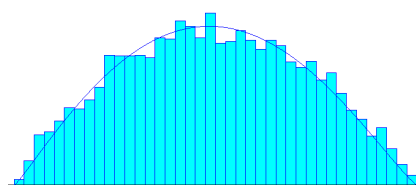
Exemplos:



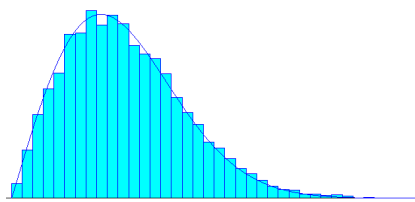
ERLANG



GAMMA



BETA



WEIBULL

entre outras...

## Distribuições Probabilísticas

**Teste de Aderência:** Teste estatístico para determinar a curva **teórica** que se ajusta à curva **empírica** determinada.

Levantamento estatístico do **número de pedidos por dia** (em 120 dias):

Pedidos por dia	Frequência em dias	Frequência Relativa Real	Frequência Relativa Poisson
8	2	0.0167	0.0190
9	4	0.0333	0.0330
10	6	0.0500	0.0480
11	8	0.0667	0.0670
12	10	0.0833	0.0830
13	12	0.1000	0.0950
14	13	0.1083	0.1030
15	14	0.1167	0.1020
16	12	0.1000	0.0960
17	10	0.0833	0.0850
18	9	0.0750	0.0700
19	7	0.0583	0.0560
20	5	0.0417	0.0420
21	3	0.0250	0.0300
22	2	0.0167	0.0200
23	2	0.0167	0.0140
24	1	0.0083	0.0080

**Freq. Relativa Real (Empírica)**

$$2/120 = 0.0167$$

$$4/120 = 0.0333$$

...

**Cálculo da média:**

$$\lambda = 1802/120 = 15$$

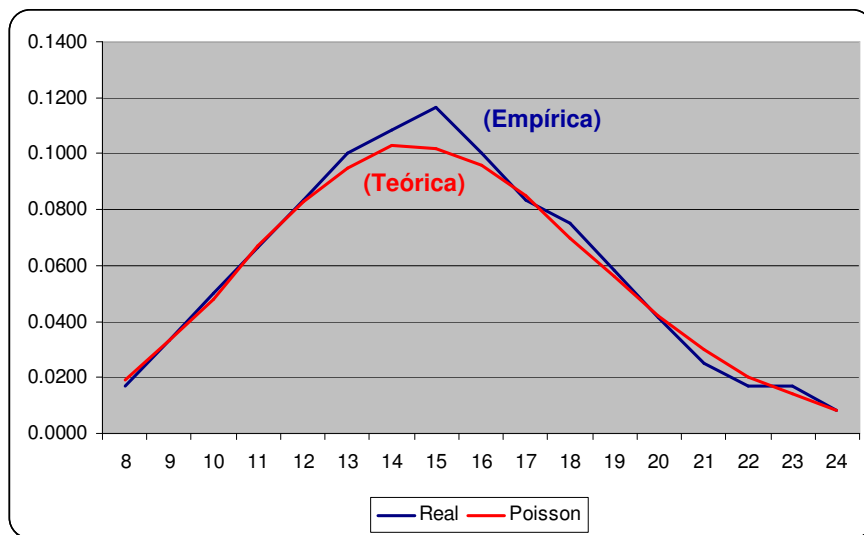
**Freq. Relativa Poisson (Teórica)**

$$p(x) = (e^{-\lambda} \cdot \lambda^x) / x!$$

$$p(8) = (e^{-15} \cdot 15^8) / 8! \\ = 0.019$$

Total de 1802 pedidos

## Distribuições Probabilísticas



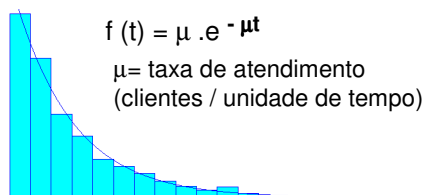
# Distribuições Probabilísticas

## Distribuições Teóricas Válidas para Aplicação em Teoria das Filas

### **Exponencial**

Normalmente usada para representar tempos de atendimento.

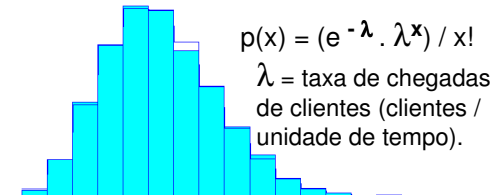
Distribuição contínua.



### **Poisson**

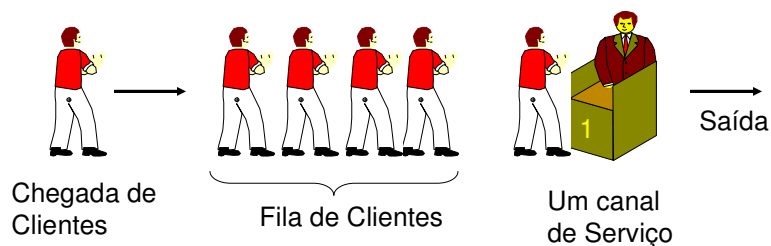
Usada normalmente para representar chegadas de clientes ao sistema e tempos de atendimento.

Distribuição discreta.



## Estrutura do Sistema M / M / 1

### 1) Modelo Básico: M / M / 1 (1 fila, 1 canal)



#### Premissas:

- Chegadas se processam segundo distribuição Poisson com média  $\lambda$  chegadas/tempo;
- Tempos de atendimento seguem distribuição Poisson de média  $\mu$ ;
- Ordem de atendimento da fila do tipo FIFO;
- Número de clientes infinito.

## Estrutura do Sistema M / M / 1

### Equações Básicas do modelo M / M / 1

1) Probabilidade de haver "n" clientes no sistema

$$P(n) = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot \left( \frac{\mu - \lambda}{\mu} \right)$$

2) Probabilidade de que o número de clientes no sistema seja superior a um valor "r"

$$P(n > r) = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{r+1}$$

3) Probabilidade de que o sistema esteja ocioso.

$$P(n=0) = \left( \frac{\mu - \lambda}{\mu} \right)$$

4) Probabilidade de que o sistema esteja ocupado.

$$P(n > 0) = \rho = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

*Também conhecido como "índice de congestionamento" ou "taxa de utilização".*

## Estrutura do Sistema M / M / 1

### Equações Referentes à Quantidade de Clientes

5) Número médio de clientes no sistema (NS)

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

6) Número médio de clientes na fila (NF)

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad NF(F > 0) = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

### Equações Referentes à Tempos

7) Tempo médio de espera na fila por cliente (TF).

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

8) Tempo médio gasto no sistema por cliente (TS).

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

## Estrutura do Sistema M / M / 1

### Relacionamentos entre as equações:

Número médio de clientes na fila (NF) e tempo médio de espera em fila (TF):

$$NF = \lambda \cdot TF$$

Número médio de clientes no sistema (NS) e tempo médio gasto por cliente no sistema (TS):

$$NS = \lambda \cdot TS$$

Tempo médio de espera em fila e tempo médio gasto no sistema:

$$TF = TS - \frac{1}{\mu}$$

Número médio de clientes em fila e número médio de clientes no sistema:

$$NF = NS - \frac{\lambda}{\mu}$$

## Aplicação - M / M / 1

### Análise da equipe de apoio administrativo

Uma equipe de apoio processa os formulários de requisição de peças para a linha de produção. O processamento não deve sofrer atrasos, caso contrário, a produção será afetada.

- Decidiu-se analisar a equipe como um todo, e não seus membros individualmente, o que resulta em um sistema de fila única e um canal de atendimento;
- Os "clientes" são os formulários de requisição;
- Não há restrição quanto ao número de requisições, portanto a população é infinita;
- Os formulários são processados por ordem de chegada (FIFO);
- As chegadas de pedidos e frequência de atendimento seguem as curvas de Poisson ou Exponencial;
- Pode ser aplicado o sistema M / M / 1;

## Aplicação - M / M / 1

### Primeira etapa: levantamento estatístico

Levantamento estatístico do número de pedidos por dia (em 120 dias):

Pedidos por dia	Frequência em dias
8	2
9	4
10	6
11	8
12	10
13	12
14	13
15	14
16	12
17	10
18	9
19	7
20	5
21	3
22	2
23	2
24	1

*Total de 1802 pedidos*

Cálculo da média:

$$\lambda = 1802/120 = 15$$

## Aplicação - M / M / 1

Levantamento estatístico do número de atendimentos por dia (em 120 dias):

Atend. por dia	Frequência em dias
12	2
13	2
14	3
15	5
16	6
17	8
18	9
19	11
20	12
21	13
22	10
23	9
24	8
25	6
26	5
27	5
28	3
29	2
30	1

*Total de 2489 atendimentos*

Cálculo da média:

$$\mu = 2489/120 = 21$$



## Aplicação - M / M / 1

### Segunda etapa: cálculo dos índices de desempenho

Como ambas as distribuições são do tipo Poisson, as equações podem ser aplicadas.

$$\rho = \lambda / \mu = 15 / 21 = 0,714 \quad \text{71\% de utilização}$$

$$NS = \lambda / (\mu - \lambda) = 15 / (21-15) = 2,5 \text{ pedidos na seção, em média}$$

$$NF = 1,78 \text{ pedidos em média esperando na fila}$$

$$TF = 0,12 \text{ dias, ou } 57,6 \text{ minutos em média de tempo de espera na fila} \\ \text{(considerando que um dia de trabalho tem 8 horas)}$$

$$TS = 0,17 \text{ dias, ou } 81,6 \text{ minutos de tempo total na seção}$$

Conclusões: o sistema está bem dimensionado, já que a utilização do sistema está em 71%. O tempo de espera dentro da seção também é razoável para este trabalho (81,6 minutos).

## Exercício

### Dimensionamento do Caixa Eletrônico

Uma agência bancária deseja analisar o atendimento prestado pela única máquina de auto-atendimento disponível aos clientes.

Foram coletados os dados das tabelas ao lado. O objetivo é saber se a máquina fica ocupada em um nível maior do que 80%, o que provoca maior índice de manutenção. Neste caso, uma nova máquina será solicitada para a matriz

Cientes por dia	Frequência em dias	Atendim. por dia	Frequência em dias
8	1	12	2
9	3	13	4
10	5	14	6
11	9	15	6
12	10	16	9
13	11	17	11
14	9	18	10
15	7	19	7
16	3	20	3
17	2	21	2
18	1	22	1

OBS: Adotar Jornada de Trabalho de 8 horas/dia

## Exercício

Cálculo da média da chegada de clientes:

Cientes por dia	Frequência em dias
8	1
9	3
10	5
11	9
12	10
13	11
14	9
15	7
16	3
17	2
18	1

Total de 61 dias

## Exercício

Cálculo da média da chegada de clientes:

Cálculo da média ( $\lambda$ )

Cientes por dia	Frequência em dias	
8	x 1	= 8
9	x 3	= 27
10	x 5	= 50
11	x 9	= 99
12	x 10	= 120
13	x 11	= 143
14	x 9	= 126
15	x 7	= 105
16	x 3	= 48
17	x 2	= 34
18	x 1	= 18

Total de 778 clientes

$$\lambda = 778 / 61 = 12.75$$

## Exercício

Cálculo da média de atendimentos por dia:

Atendim. por dia	Frequência em dias
12	2
13	4
14	6
15	6
16	9
17	11
18	10
19	7
20	3
21	2
22	1

Total de 61 dias

## Exercício

Cálculo da média de atendimentos por dia:

Cálculo da média ( $\mu$ )

Atendim. por dia	Frequência em dias
12	x 2
13	x 4
14	x 6
15	x 6
16	x 9
17	x 11
18	x 10
19	x 7
20	x 3
21	x 2
22	x 1

$$= 24$$

$$= 52$$

$$= 84$$

$$= 90$$

$$= 144$$

$$= 187$$

$$= 180$$

$$= 133$$

$$= 60$$

$$= 42$$

$$= 22$$

+

$$\mu = 1018 / 61 = 16.69$$

Total de 1018 atendim.

## Exercício

### Conclusões:

Considerando-se que os comportamentos seguem a curva de Poisson ou Exponencial:

$$\rho = \lambda / \mu = 12.75 / 16.69 = 0.76$$

76% de utilização

Conclui-se, portanto, que a agência não precisa de outra máquina de atendimento.