Eng. de Produção

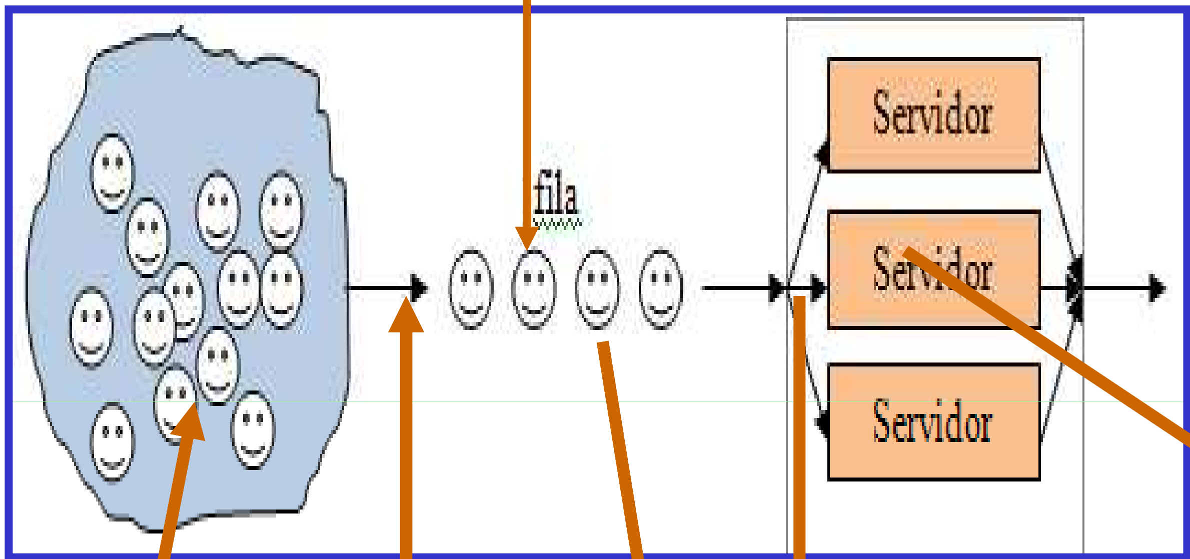
Introdução à Teoria das Filas

Prof. Ricardo Villarroel Dávalos – ricardo.davalos@unisul.br

Fpolis, Abril de 2010

Introdução

Disciplinas das filas



λ e IC

c

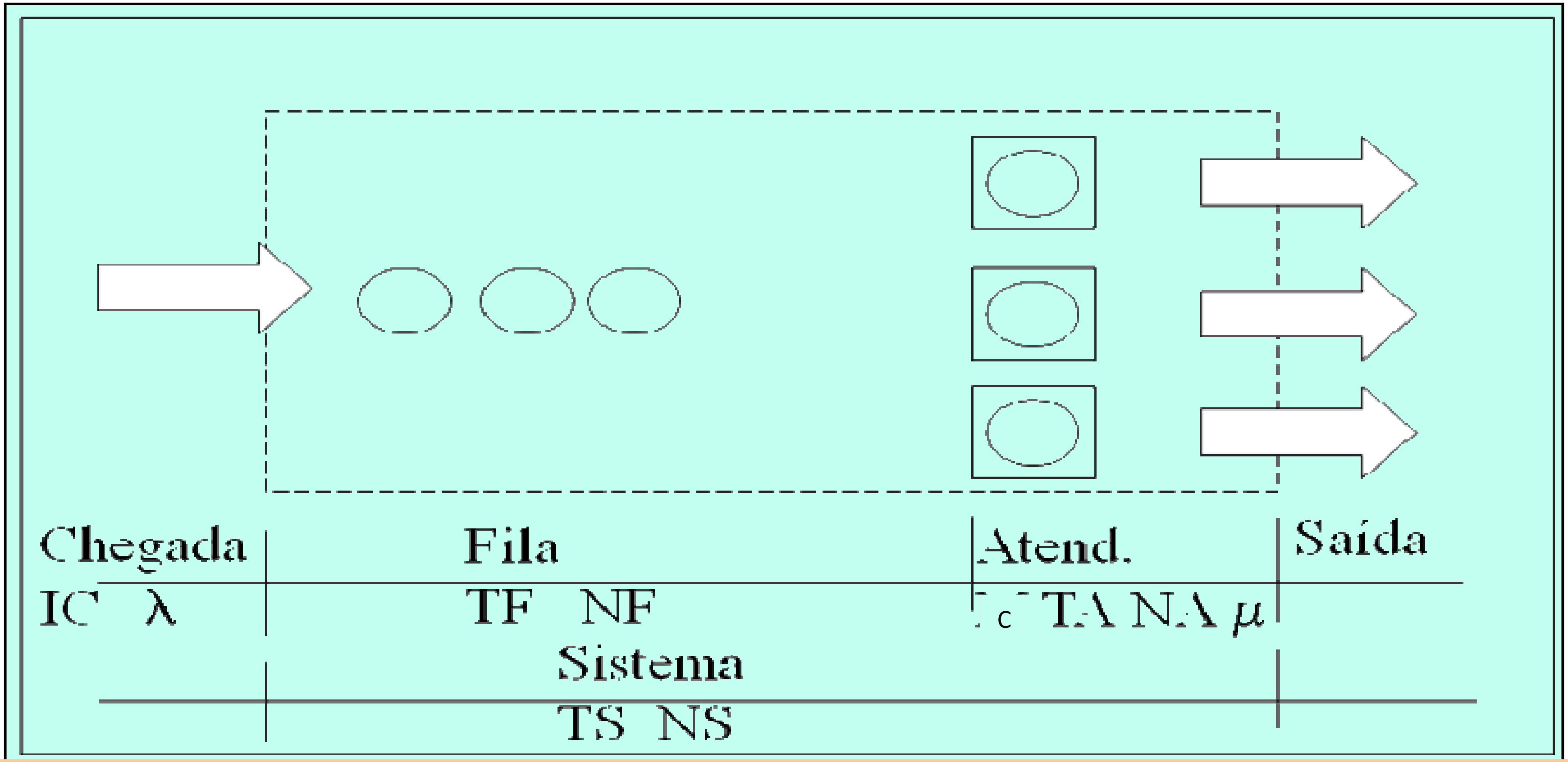
μ e TA

TF = f (λ , μ)

População de clientes

Variáveis aleatórias

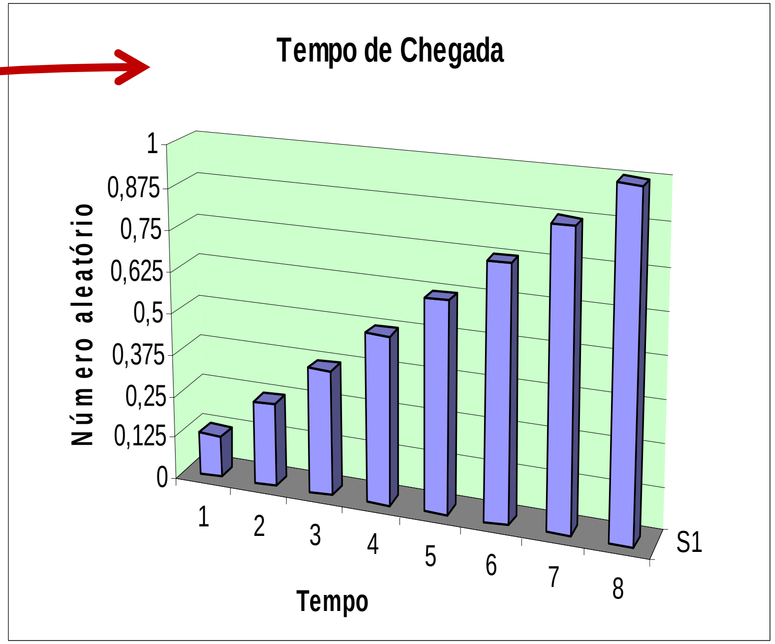
Localização das variáveis aleatórias

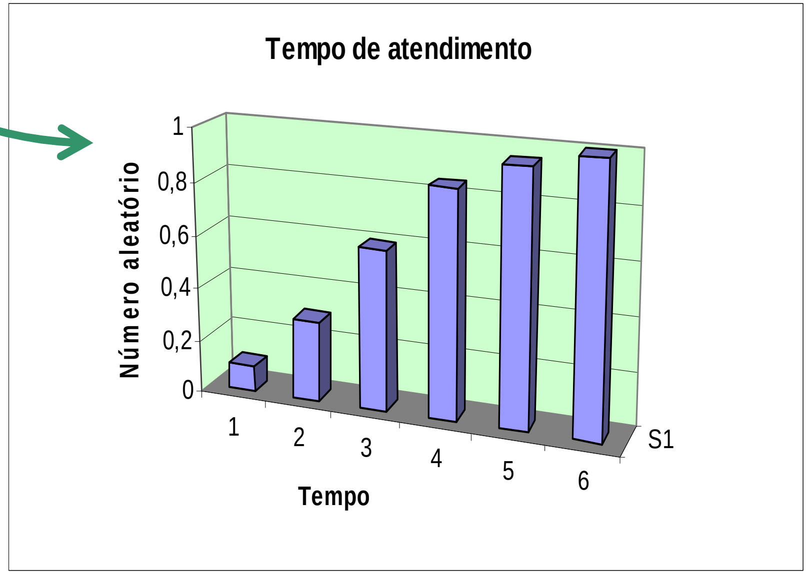


NS=Numero Médio de Clientes no Sistema
NF=Número Médio de Clientes na Fila
NA=Número Médio de Clientes atendidos
NS = NF + NA (Número médio de clientes no sistema
TS = TF + TA (Tempo médio de permanência no sistema

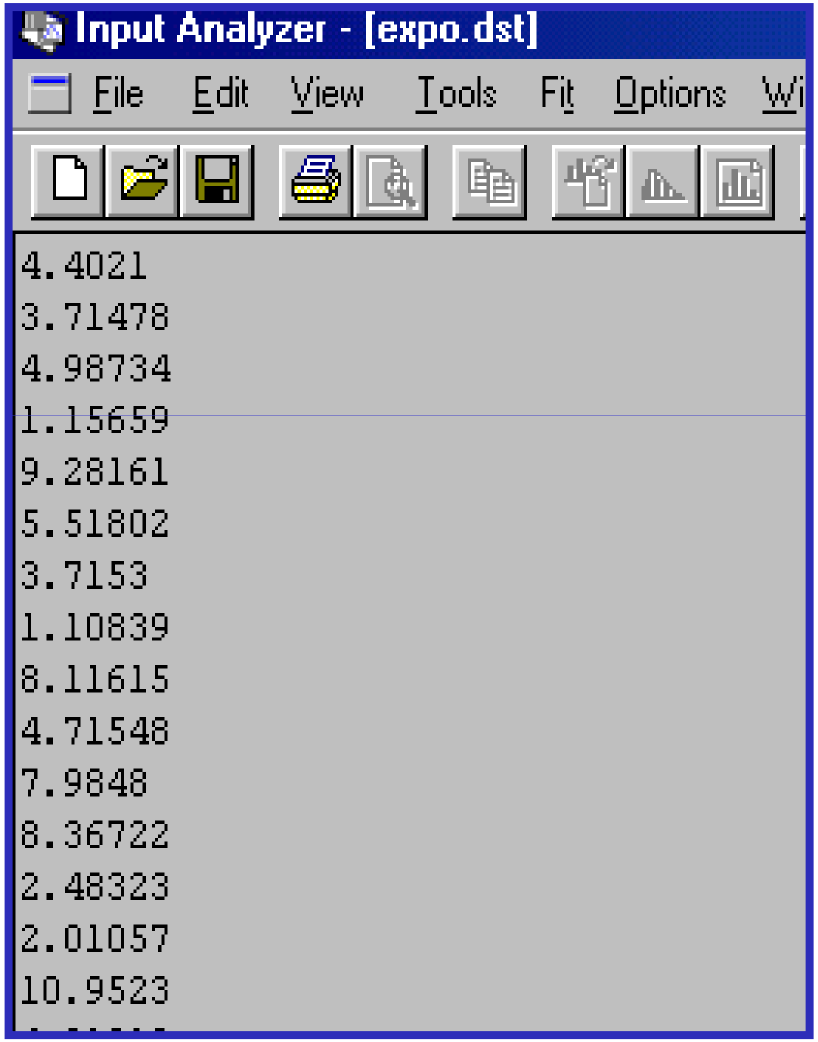
Dinâmica de uma fila

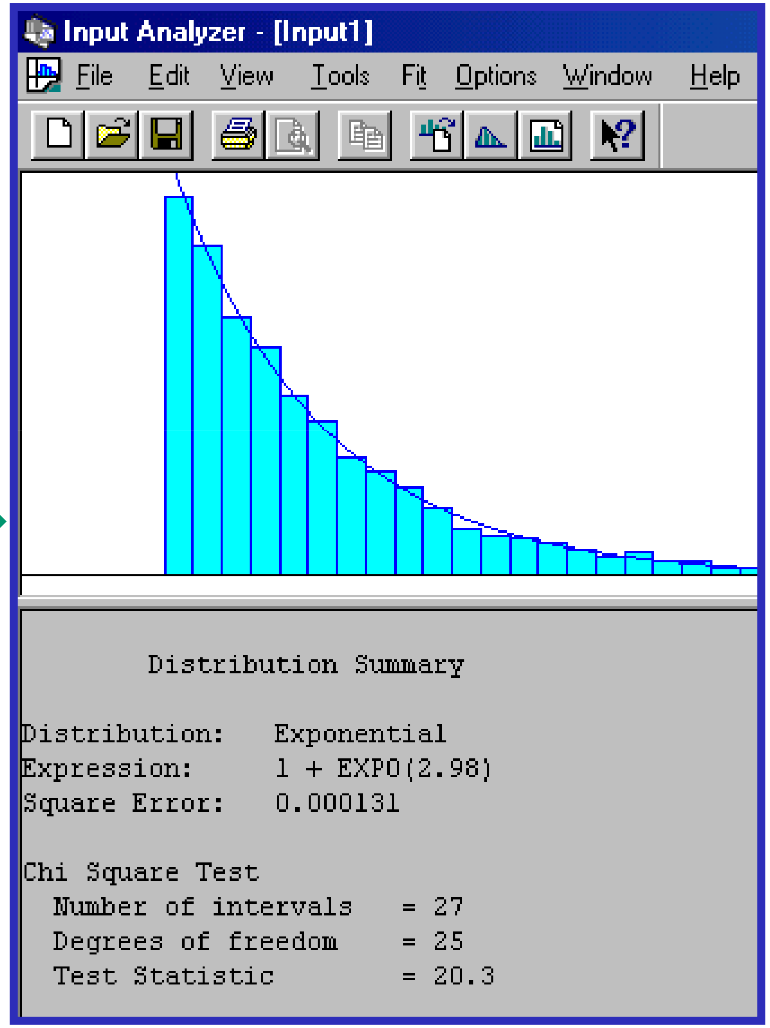
Clientes	Tempo de Chegada	Tempo de Serviço	Tempo de Chegada no Relógio	Serviço Início	Serviço Fim	Tempo no Sistema	Tempo Livre
1	-	3	0	0	3	3	0
2	6	1	6	6	7	1	3
3	6	6	12	12	18	6	5
4	4	4	16	18	22	6	0
5	2	4	18	22	26	8	0
6	3	6	21	26	32	11	0
7	8	2	29	32	34	5	0
8	1	1	30	34	35	5	0
9	8	5	38	38	43	5	3
10	2	4	40	43	47	7	0
11	3	5	43	47	52	9	0
12	5	2	48	52	54	6	0
13	6	1	54	54	55	1	0
14	7	3	61	61	64	3	6
15	2	6	63	64	70	7	0
16	4	2	67	70	72	5	0
17	3	3	70	72	75	5	0
18	2	4	72	75	79	7	0
19	8	5	80	80	85	5	1
20	6	6	86	86	92	6	1
21	4	3	90	92	95	5	0
22	2	2	92	95	97	5	0
23	3	1	95	97	98	3	0
24	9	5	104	104	109	5	6
	104	84			Subtotal	129	25





Dinâmica de uma fila





Dinâmica de uma fila – Distribuições estatísticas

Distribuição	Abreviatura	Parâmetros	Melhor Aplicação
Poisson	POIS	Média	Chegada
Exponencial	EXPO	Média	Chegada
Triangular	TRIA	Min/ Média/Max	Atendimento
Uniforme	UNIF	Min/ Média/Max	Atendimento
Normal	NORM	Média/Desvio	Atendimento
Johnson	JOHN	G, D, L, X	Atendimento
Log Neperiano	LOGN	Média Logrtm.	Atendimento
Weibull	WEIB	Beta, Alfa	Atendimento
Discreta	DISC	P1, V1, ...	Cheg/Atendim
Contínua	CONT	P1, V1, ...	Cheg/Atendim
Erlang	ERLA	Média / K	Atendimento
Gamma	GAMM	Beta, Alfa	Atendimento

Dinâmica de uma fila – Distribuições estatísticas

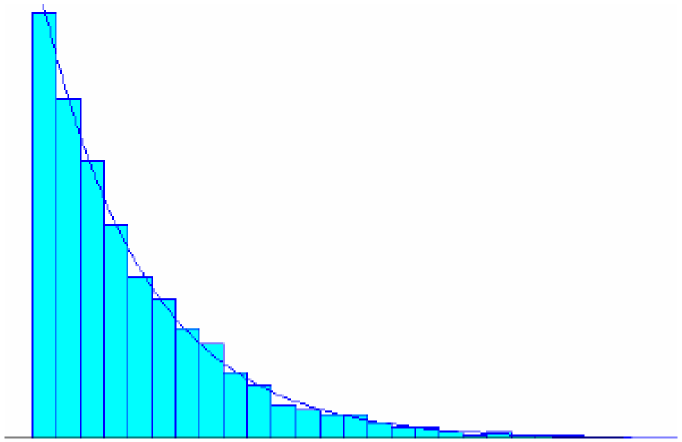


Figura 6 - Histograma de uma distribuição de probabilidades do tipo Exponencial

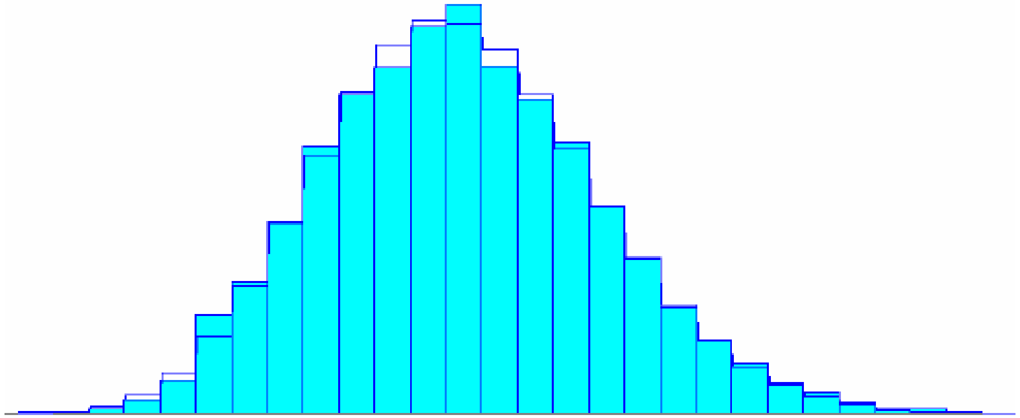


Figura 7 - Histograma de uma distribuição de probabilidades do tipo Poisson

Estas duas distribuições são utilizadas na teoria das filas para representar os tempos de chegada e de atendimento

Modelos de filas

Kendall define os modelos de fila:

Modelo de fila A/B/c/K/m/Z

onde:

A = distribuição dos intervalos entre chegadas

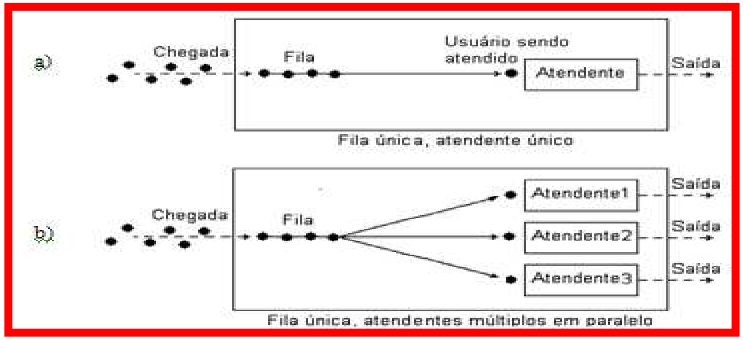
B = distribuição dos tempo de serviço

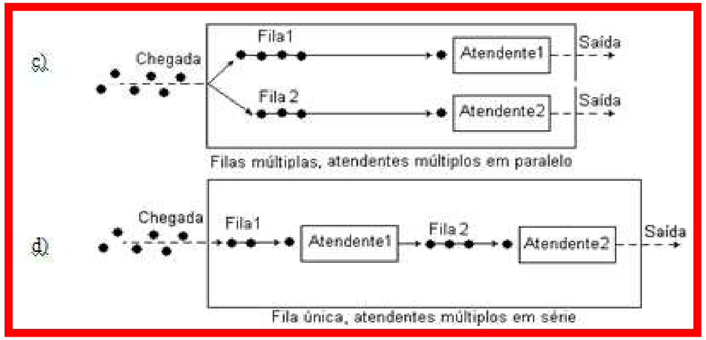
c = quantidade de servidores (atendentes)

K = capacidade max. do sistema (NS máximo)

m = tamanho da população

Z = disciplina da fila





Modelos de filas

Na notação de Kendall define os Valores de A e B dependem do tipo de distribuição.

M: **Exponencial ou Poisson** (Denominadas Marcovianas)

Em: Erlang de estágio m

Hm: Hiper-exponencial de estágio m

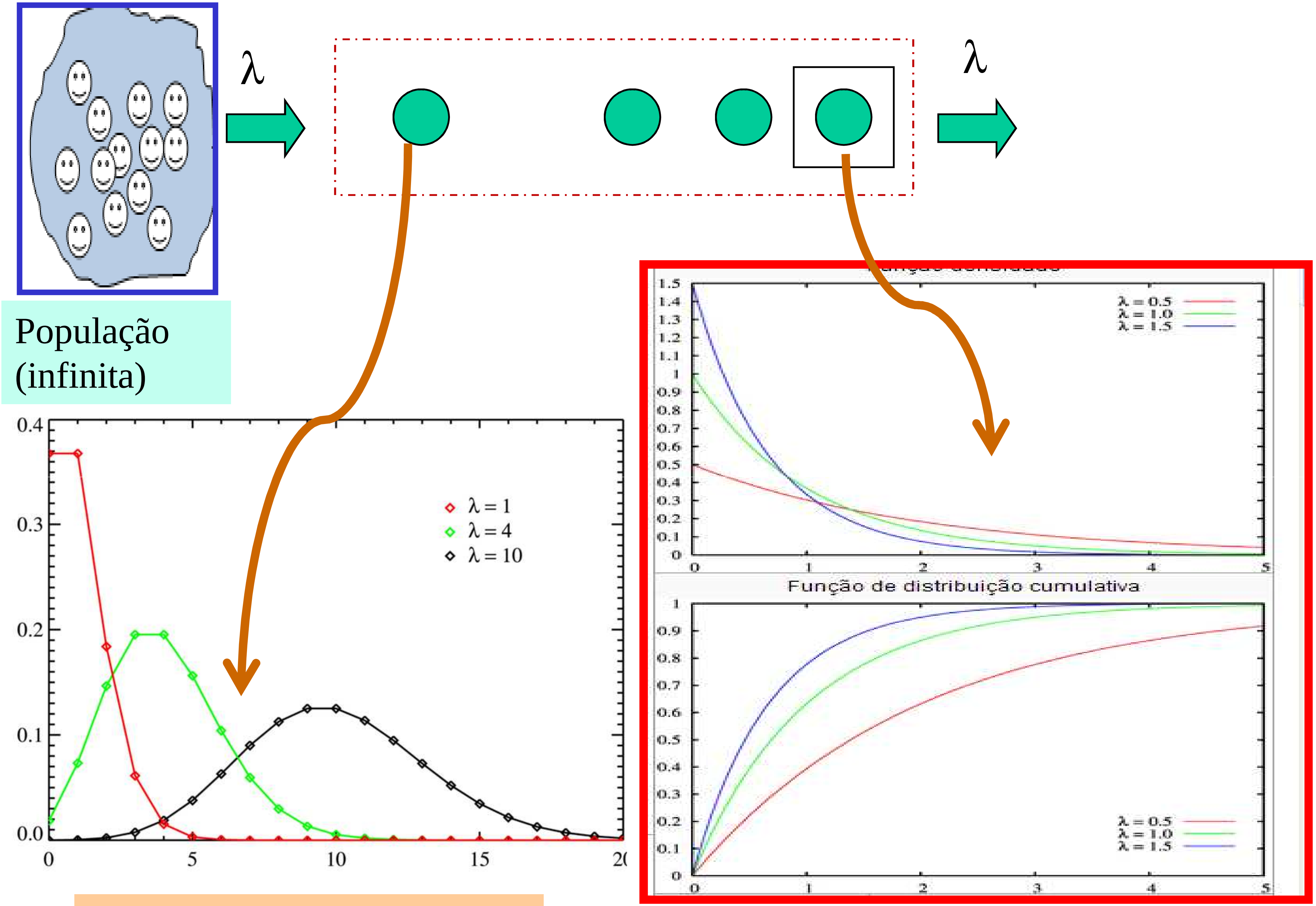
Determinística

Outros

Por exemplo: **M/E2/5/20/∞/Randômico -> A/B/c/K/m/Z**

Significa: Chegada Marcoviana, Atendimento Erlang de segundo grau, 5 atendentes, capacidade máxima do sistema igual a 20 clientes, população infinita e atendimento ranômico (aleatório)

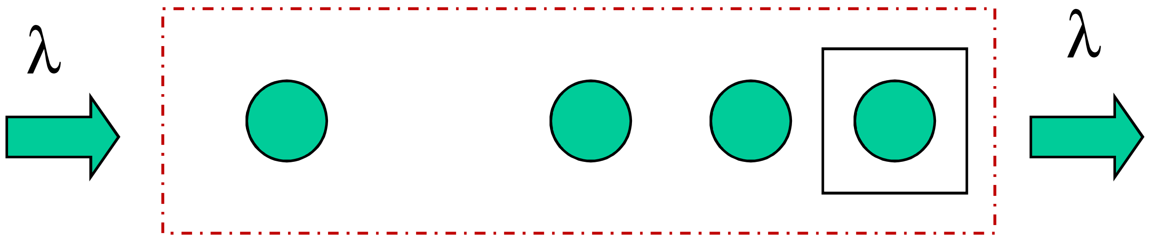
O Modelo M/M/1: População Infinita



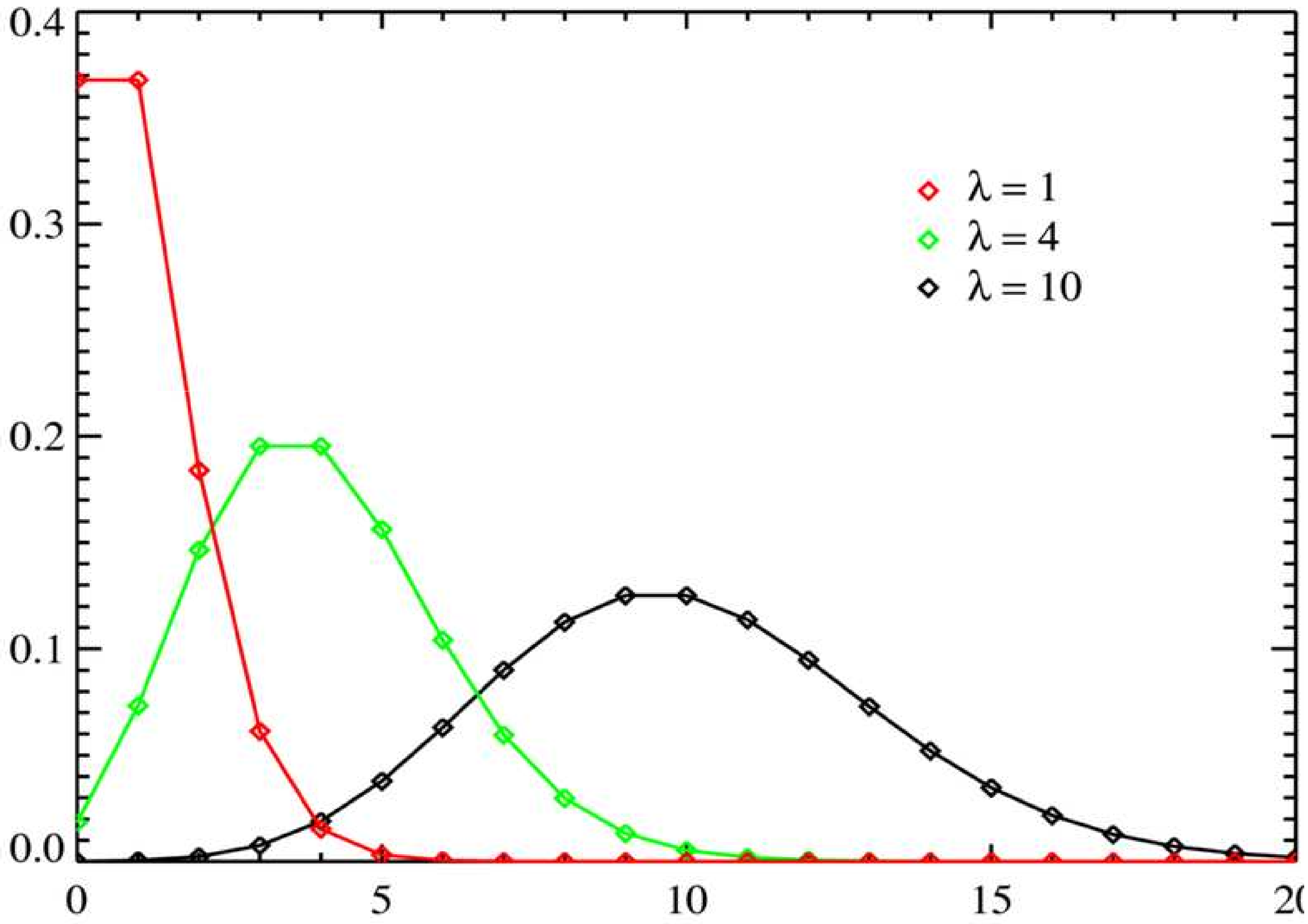
Modelo de fila M/M/1

O modelo de fila M/M/1

- A notação condensada A/B/c é muito usada e se supõe que **não há limite** para **o tamanho da fila**, a **população é infinita** e a **disciplina é FIFO**.
- Para A e B, quando a distribuição for **Exponencial negativa ou Poisson**, usa-se M (**Marcoviana**).
- O **modelo de fila M/M/1** que tanto as chegadas quanto o **atendimento são Marcovianos**, i.e., seguem a distribuição de Poisson (p/ ritmos) ou Exponencial negativa (p/ intervalos). Além disso, existe apenas um servidor.



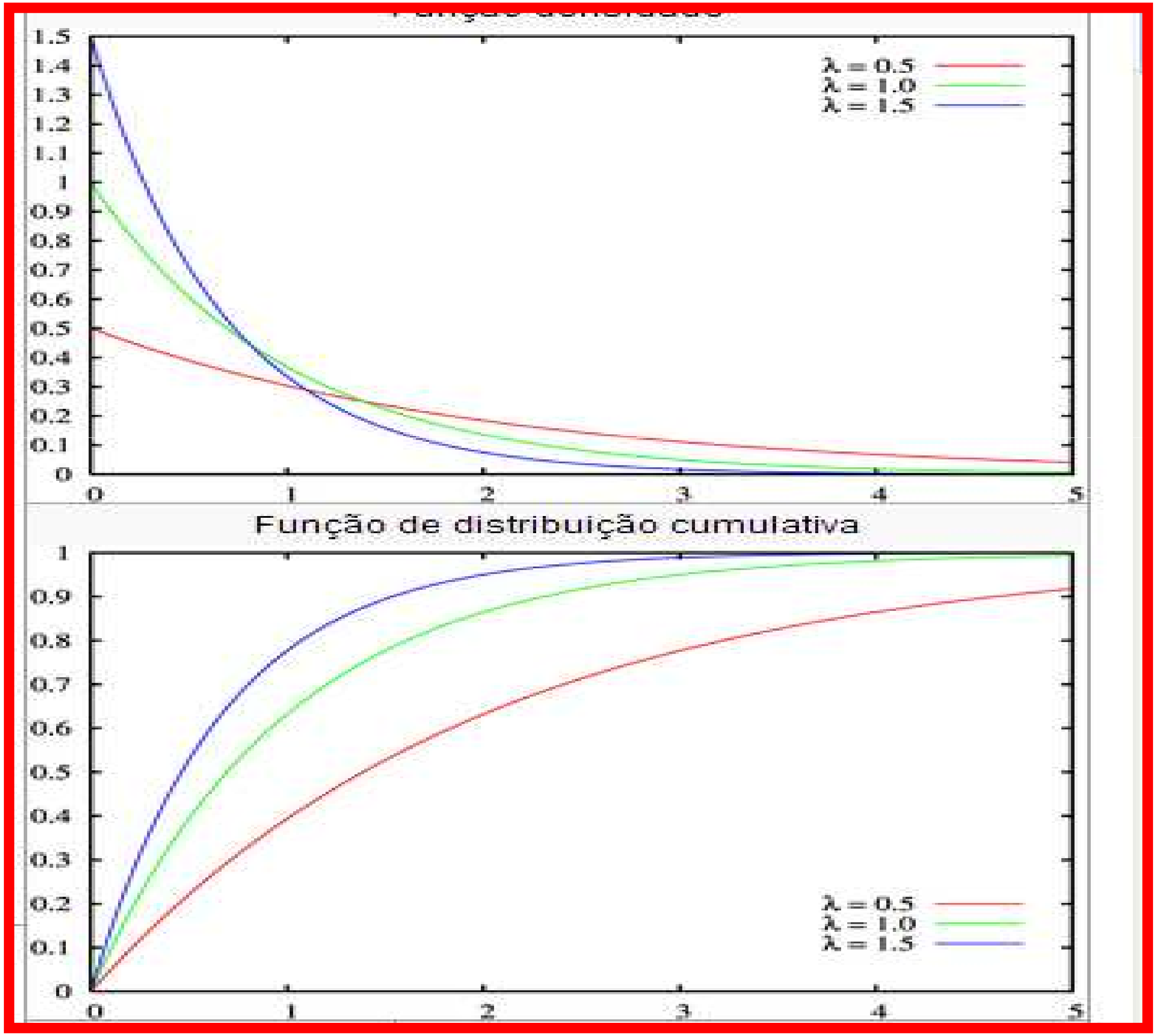
Função Distribuição de Probabilidade Poisson



Função de distribuição de probabilidade Exponencial Negativa

Função densidade

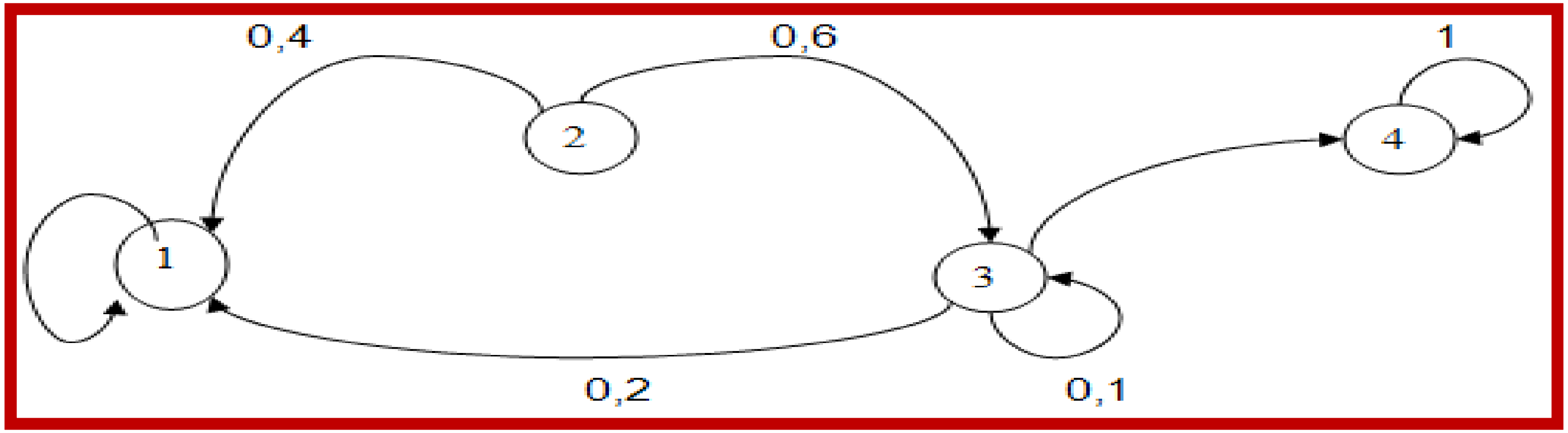
Função cumulativa



Processos Marcovianos

Um **processo de Marcoviano** consiste num conjunto de objetos e num conjunto de estados tais que:

- Em qualquer instante cada objeto deve estar num estado (objetos distintos não estão necessariamente em estados diferentes); e
- A probabilidade de que um objeto passe de um estado para outro num período de tempo depende apenas desses dois estados.



O Modelo M/M/1: População Infinita:

1 – Nr. Médio de clientes na fila:

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

2 – Nr. Médio de clientes no sistema:

$$NS = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

3 – Tempo médio que o cliente fica na fila:

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

4 – Tempo médio que o cliente fica no sistema:

$$TS = \frac{1}{(\mu - \lambda)}$$

5 – Probabilidade de existirem n clientes no sistema:

$$Pn = (1 - \lambda / \mu)(\lambda / \mu)^n$$

Exemplo 3

Uma empresa deseja contratar um reparador para efetuar manutenção em suas máquinas, que estragam a um ritmo de 3 falhas por hora. Para tal possui duas opções: um reparador lento, que é capaz de consertar a um ritmo de 4 falhas por hora ou um reparador rápido, que é capaz de consertar a um ritmo médio de 6 falhas por hora. O salário/hora do reparador lento é $3,00 e do reparador rápido é $5,00. O custo de uma máquina parada é $5,00. Pede-se qual a contratação que deve ser efetuada para que o custo total (reparador mais máquinas paradas) seja mínimo?

Reparador Lento

$NS = \lambda/(\mu - \lambda) = 3/(4-3) = 3$ máquinas

Custo das máquinas = 3* 5 = $ 15,00

Custo do reparador = $ 3,00

Custo total = $ 18,00

Reparador rápido

$NS = \lambda/(\mu - \lambda) = 3/(6-3) = 1$ máquinas

Custo das máquinas = 1* 5 = $ 5,00

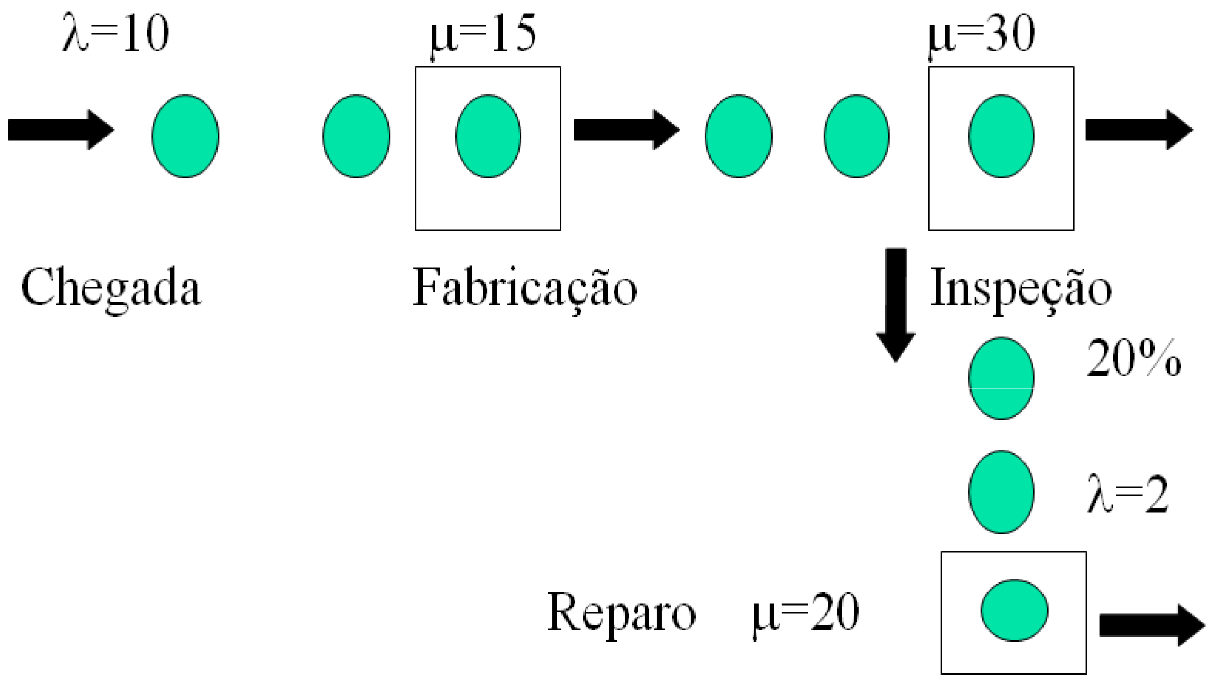
Custo do reparador = $ 5,00

Custo total = $ 10,00

Comparando, vemos que o reparador rápido, apesar de ter um custo maior, implica um custo total menor.

Exemplo 4

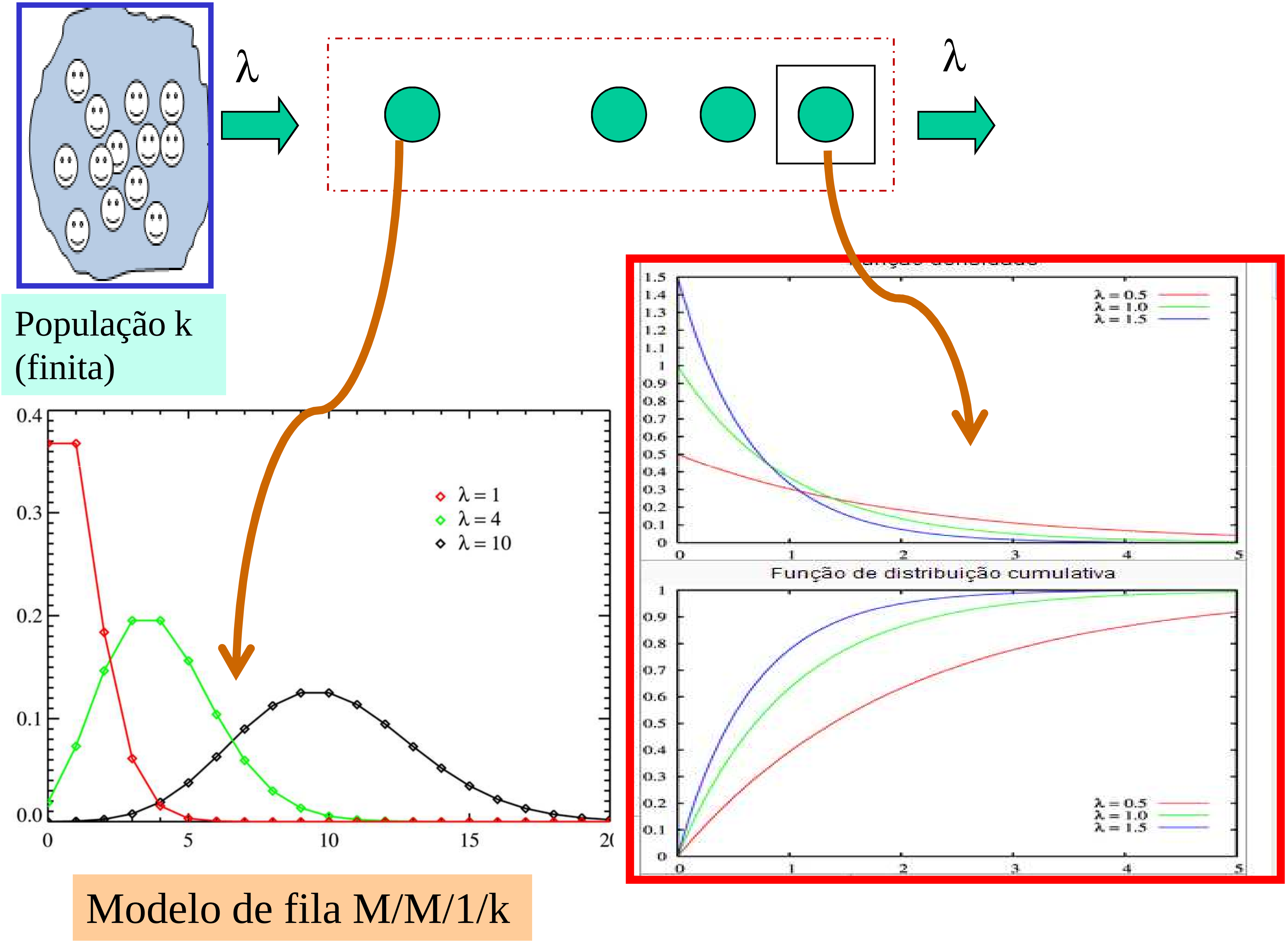
Em um sistema de filas seqüenciais, conforme figura a seguir, calcule as filas que se formam em cada servidor.



Fila	λ	μ	NF
Fabricação	10	15	1,54
Inspeção	10	30	0,17
Reparo	2	20	0,01

Para encontrar o NF foi utilizada $NF = \lambda^2 / \mu(\mu-\lambda)$

O Modelo M/M/1/k: População Finita


λ
λ
População k
(finita)
λ = 1
λ = 4
λ = 10
Função de distribuição cumulativa
λ = 0.5
λ = 1.0
λ = 1.5
Modelo de fila M/M/1/k

O Modelo M/M/1/k: População Finita

1 – Nr. Médio de clientes na fila:

$$\mathbf{NF} = \mathbf{K} - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda}.(1 - \mathbf{P}_0)$$

2 – Nr. Médio de clientes no sistema:

$$\mathbf{NS} = \mathbf{K} - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda}.(1 - \mathbf{P}_0) + \frac{\lambda}{\mu}$$

3 – Tempo médio que o cliente fica na fila:

$$\mathbf{TF} = \frac{\mathbf{K}}{\lambda} - \frac{(\lambda + \mu).(1 - \mathbf{P}_0)}{\lambda^2}$$

4 – Tempo médio que o cliente fica no sistema:

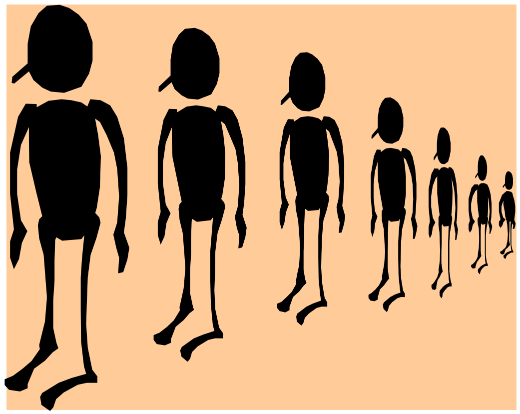
$$\mathbf{TS} = \frac{\mathbf{K}}{\lambda} - \frac{(\lambda + \mu).(1 - \mathbf{P}_0)}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu}$$

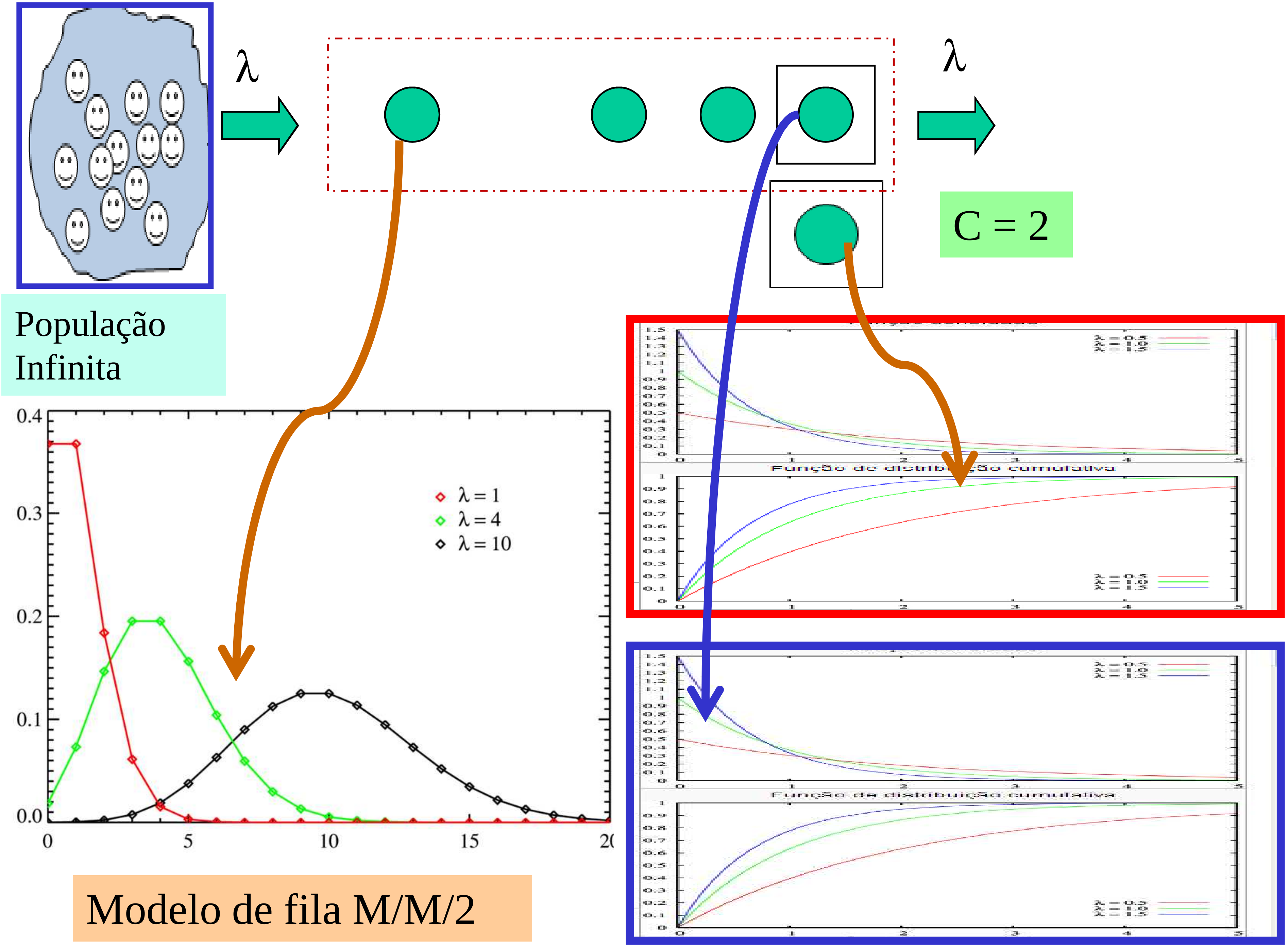
5 – Probabilidade de existirem n clientes no sistema:

$$\mathbf{Pn} = \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\mathbf{K-n}}}{(\mathbf{k} - \mathbf{n})!.\sum_{j=0}^{\mathbf{k}} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}}{\mathbf{j}!}}$$

Tendo em vista a **complexidade matemática** destes modelos não iremos nos estender nesta abordagem e também **não teremos exemplos** deste tipo de modelo de fila (M/M/1/k).

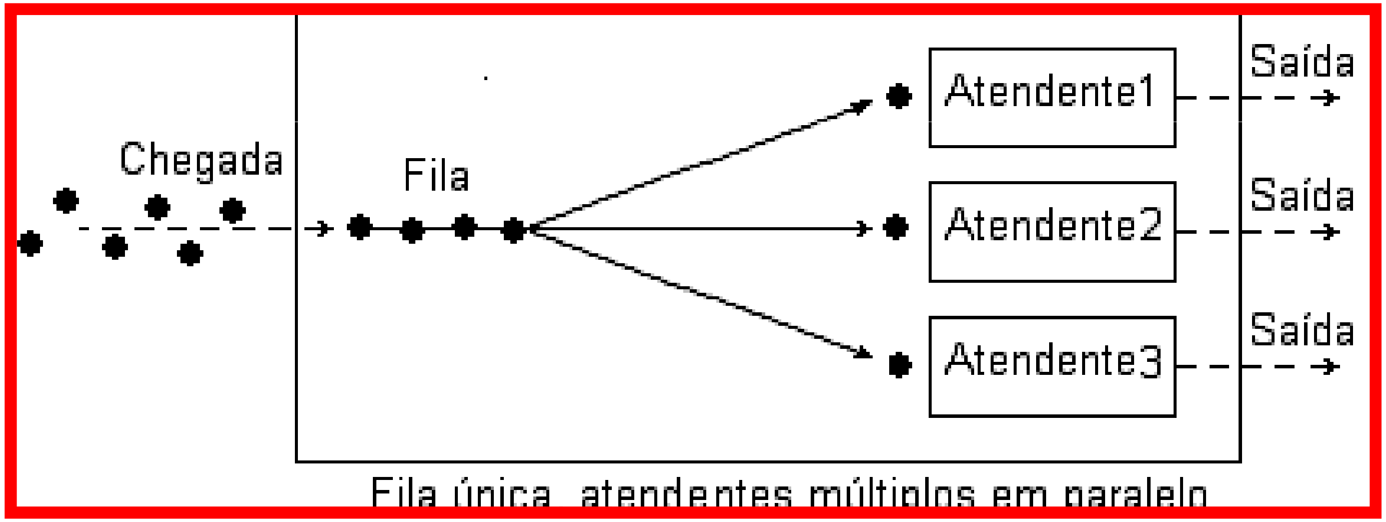
O Modelo M/M/c: População Infinita




λ
λ
C = 2
População
Infinita
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
5
10
15
20
λ = 1
λ = 4
λ = 10
Função de distribuição cumulativa
λ = 0.5
λ = 1.0
λ = 1.5
Modelo de fila M/M/2

O modelo de fila M/M/c

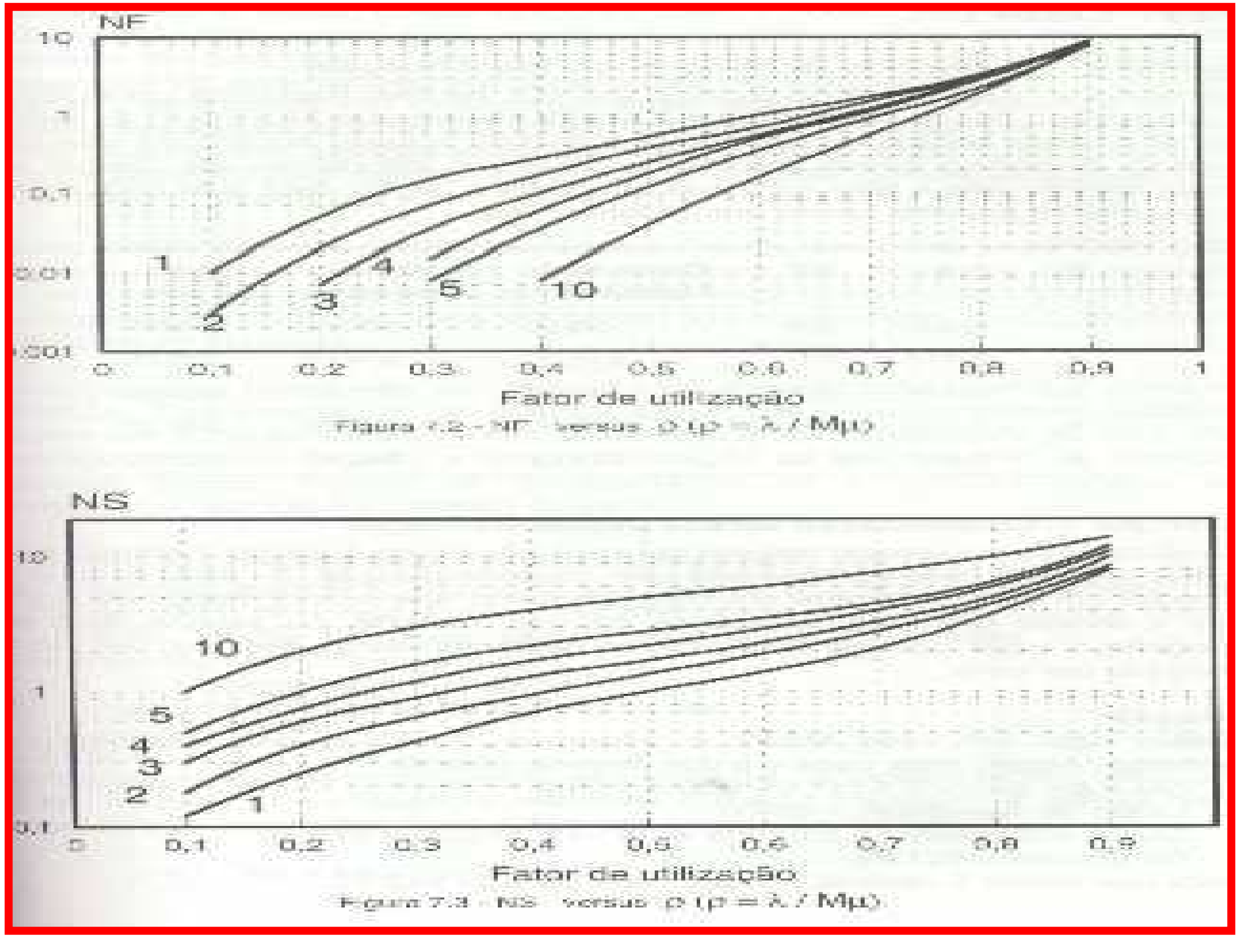
Representa uma única fila e diversos servidores e, tanto a chegada como o atendimento são Marcovianos (isto é, seguem a Distribuição de Poisson ou da Distribuição Exponencial Megativa).



Para um sistema que tem a estrutura da figura a anterior são válidas as definições estudadas anteriormente (λ, μ, IC = 1/λ, TA e c = capacidade de atendimento).

O modelo de fila M/M/c

As fórmulas para o modelo M/M/c são complexas e difíceis de serem manipuladas e, assim a preferência generalizada é pelo uso de gráficos. A seguir uma ilustração destes gráficos.



O Modelo M/M/c: População Infinita

Nome	Descrição	Fórmula
ρ	Taxa de utilização do sistema	$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$
r	Relação entre a taxa de chegada e a taxa de atendimento	$r = \frac{\lambda}{\mu}$
P_0	Probabilidade de nenhum usuário do sistema	$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{cr^c}{c!(c-r)} \right)^{-1}$
P_n	Probabilidade de n usuários no sistema	$P_n = P_0 \frac{r^n}{n!} \xrightarrow{se} 1 \leq n \leq c$ $P_n = P_0 \frac{r^n}{c^{n-c} c!} \xrightarrow{se} n \geq c$
L	Número médio de usuários no sistema	$L = r + \left[\frac{r^{c+1} c}{c!(c-r)^2} \right] P_0$
L_q	Número médio de usuários na fila	$L_q = \frac{P_0 c r^{c+1}}{c!(c-r)^2}$
W	Tempo médio de esperado sistema	$W = \frac{1}{\mu} + \left[\frac{r^c \mu}{(c-1)!(c\mu - \lambda)^2} \right] P_0$
W_q	Tempo médio de espera na fila	$Wq = \frac{r^c \mu}{(c-1)!(c\mu - \lambda)^2} P_0$
W_q (t)	Função de probabilidade acumulada de tempo médio de espera na fila	$W_q(t) = 1 - P_0 \frac{r^c}{c!(1-\rho)} e^{-(c\mu - \lambda)t}$

Tabela 4 - Principais indicadores de desempenho do modelo M/M/c/∞/FIFO
Fonte: Sinay, (2005)

Exemplo 1

Uma fábrica possui um depósito de ferramentas onde os operários vão receber as ferramentas especiais para a realização de uma determinada tarefa. Verificou-se que o ritmo de chegada (λ = 1 chegada/minuto) e o ritmo de atendimento(μ=1,2 atendimentos por minuto) seguem o modelo Marcoviano. A fábrica paga $9,00 por hora ao atendente e $18,00 ao operário. Pede-se: Acrescentar diversos atendentes até chegar ao custo mínimo.

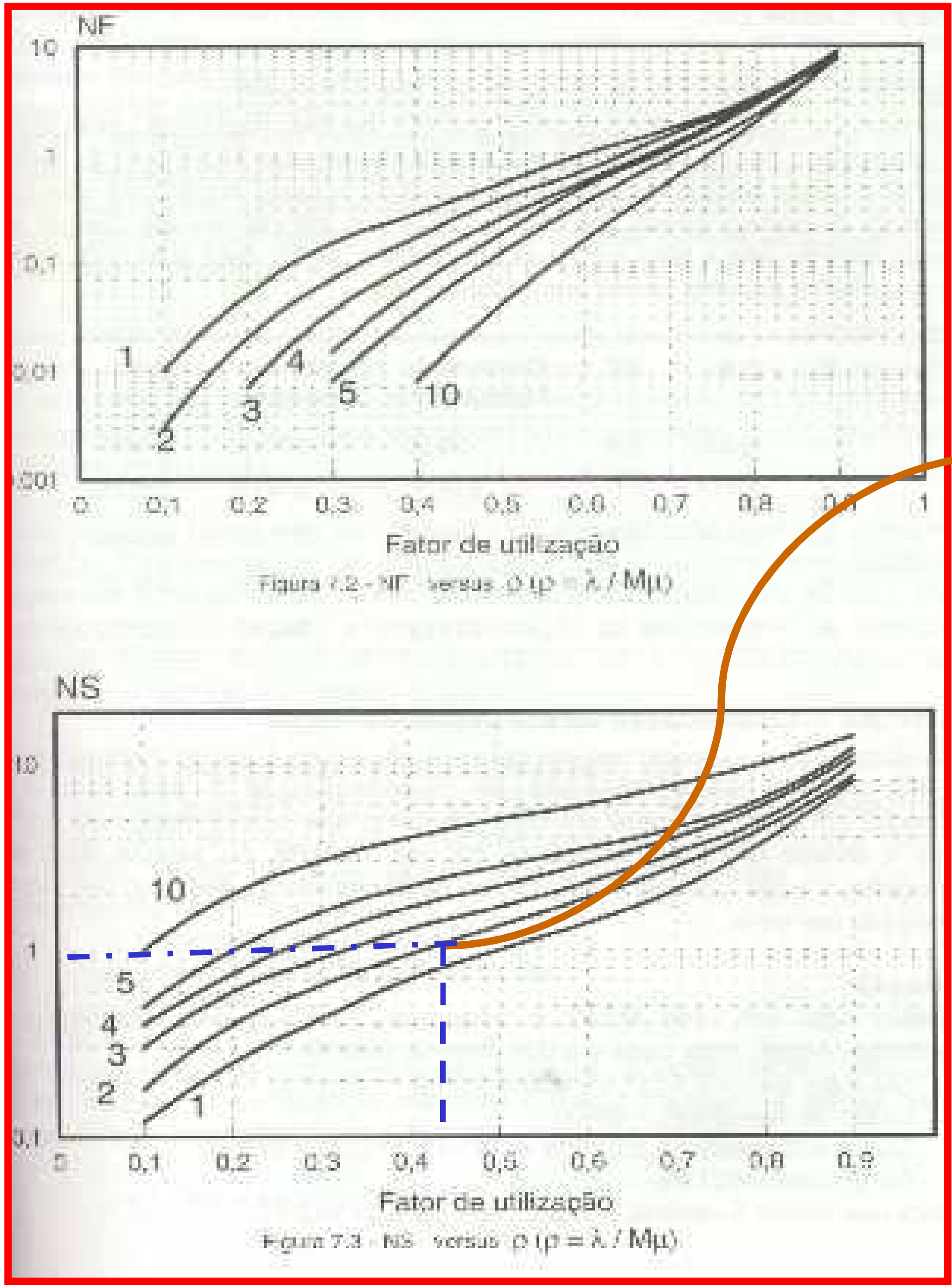
a) Modelo M/M/1 (c=1): Custo Total = Custo horário do(s) atendente (s) + **custo horário dos operários** (na fila sendo atendidos pelo(s) servidor(es), pois não estão produzindo em seus postos de trabalho.)

$\rho = \lambda / \mu = 1/1,2 = 0,833$

$NS = \lambda/(\mu - \lambda) = 1/(1,2 - 1) = 5$

Custo Total = Custo do atendente + Custo operários

= 9 + 5* 18 = $ 99,00



b) Modelo M/M/2 (c=2):

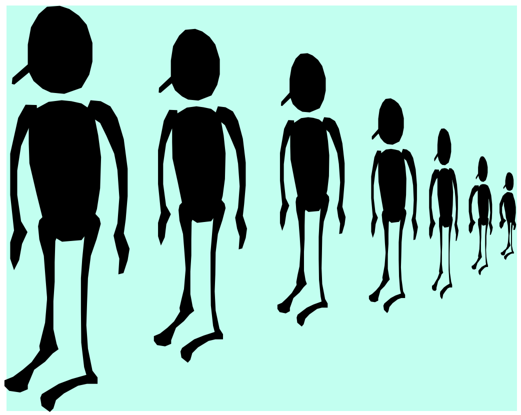
Custo Total = Custo horário do(s) atendente (s) + custo horário dos operários

$\rho = \lambda / c\mu = 1/1{,}2*2 = 0{,}416$

NS = 1 (veja tabela)

Custo Total = Custo do atendente + Custo operários

= 2*9 + 18 = $ 36,00



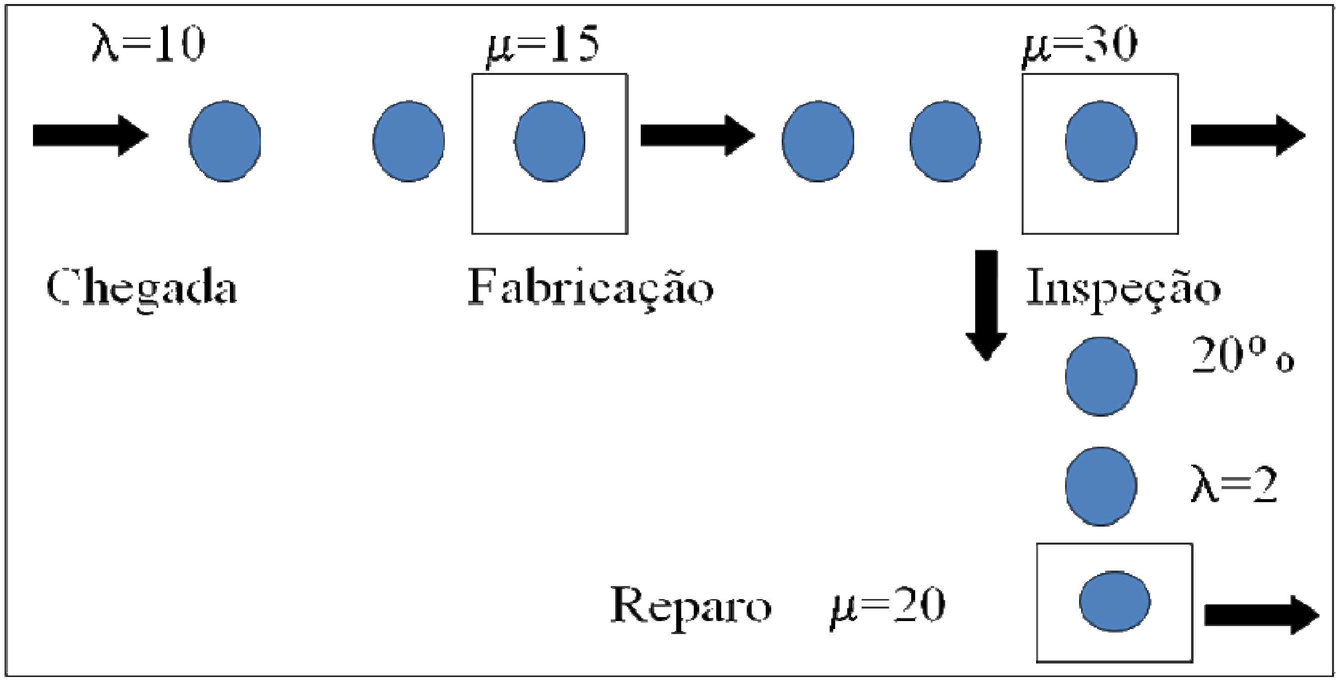
Para 3, 4 e 5 o cálculo do custo total é realizado de forma análoga ao anterior e os resultados se encontram na tabela a seguir

c	ρ	NS	Custo dos atendentes [$]	Custo dos operários [$]	Custo total [$]
1	0,833	5	9	90	99
2	0,417	1	18	18	36
3	0,277	0,7	27	12,6	39,6
4	0,208	0,6	36	10,8	46,8
5	0,167	0,59	45	10,62	55,62

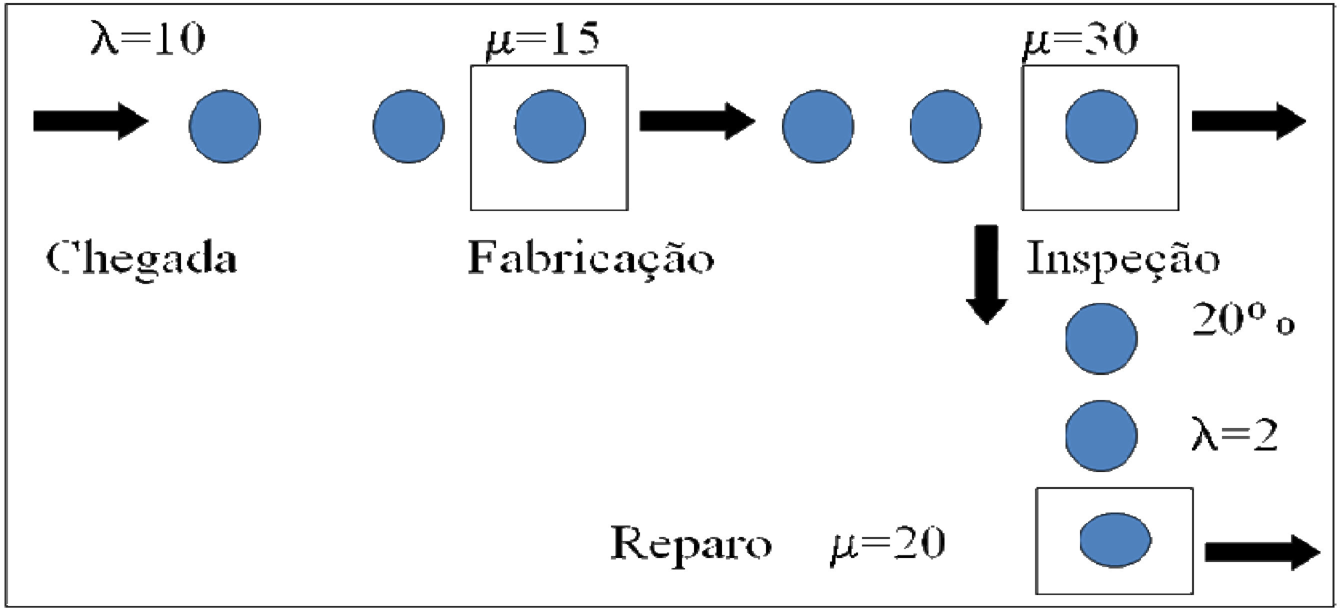
Ver Gráfico

Exemplo 2

No sistema de filas seqüenciais descrito na figura abaixo, admita que o ritmo de chegada tenha crescido para λ=25 peças por minuto, calcule a quantidade de servidores de cada estação de trabalho tal que o tamanho da fila correspondente (NF) seja menor que 1.



Exemplo 2

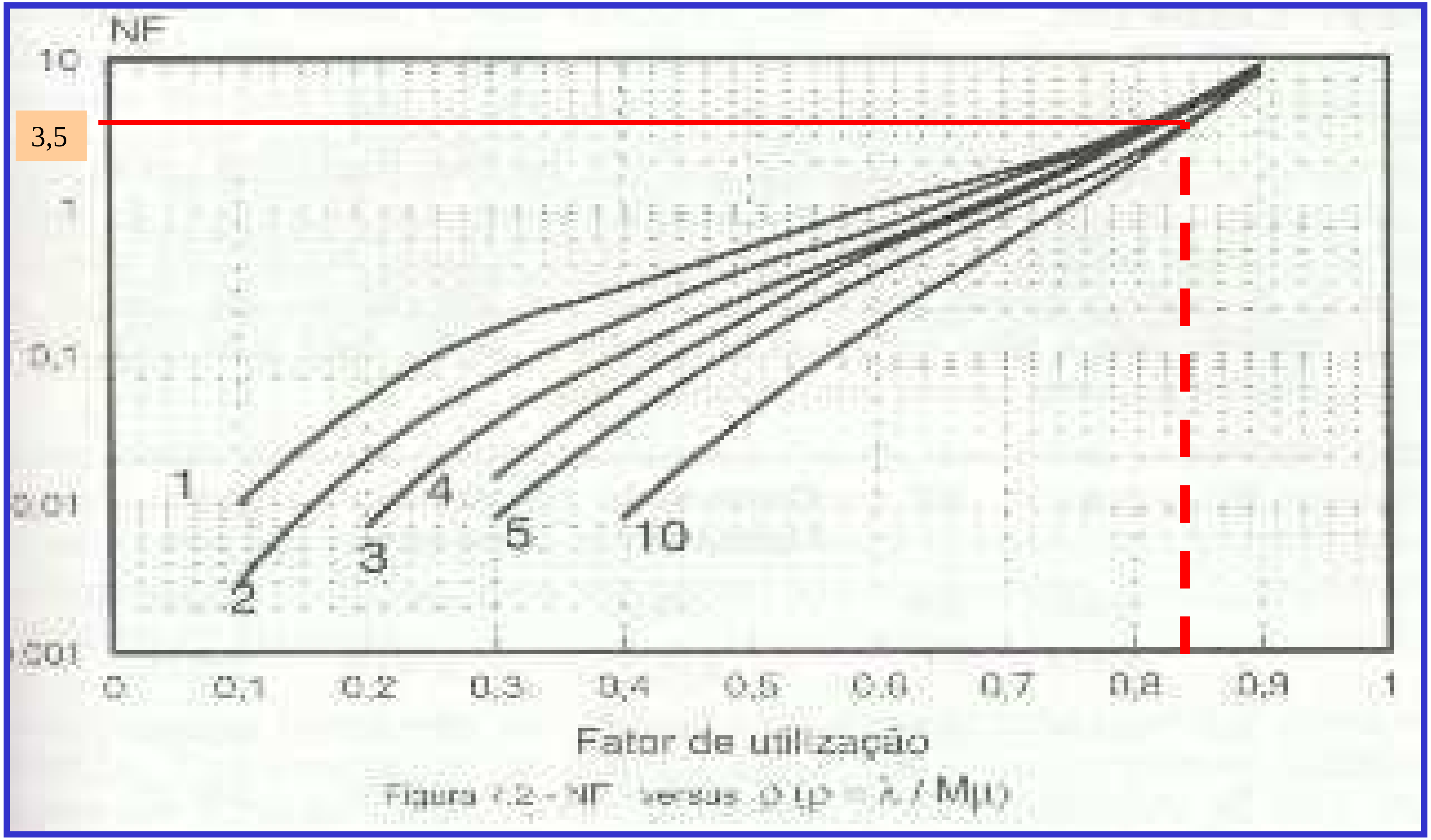


$$NF = \lambda^2 / \mu(\mu-\lambda)$$

$$25*25/30(30-25)$$

C	Fabricação λ=25 e	μ=15	Inspeção λ=25 e	μ=30	Reparo λ=(0.2)*25 e	μ=20
	ρ	NF	ρ	NF	P	NF
1	-		0,83	4,16	0,25	0,09
2	0,83	3,5	0,41	0,2		
3	0,55	0,5				

Ver gráfico



Modelo M/M/2 (c=2):

$\rho = \lambda / c\mu = 25/15*2 = 0,833$

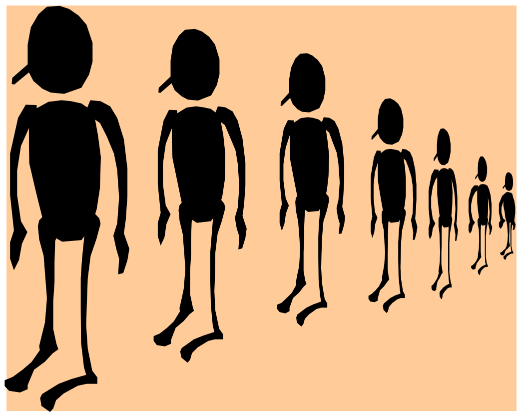
NS = 3,5 (veja gráfico)

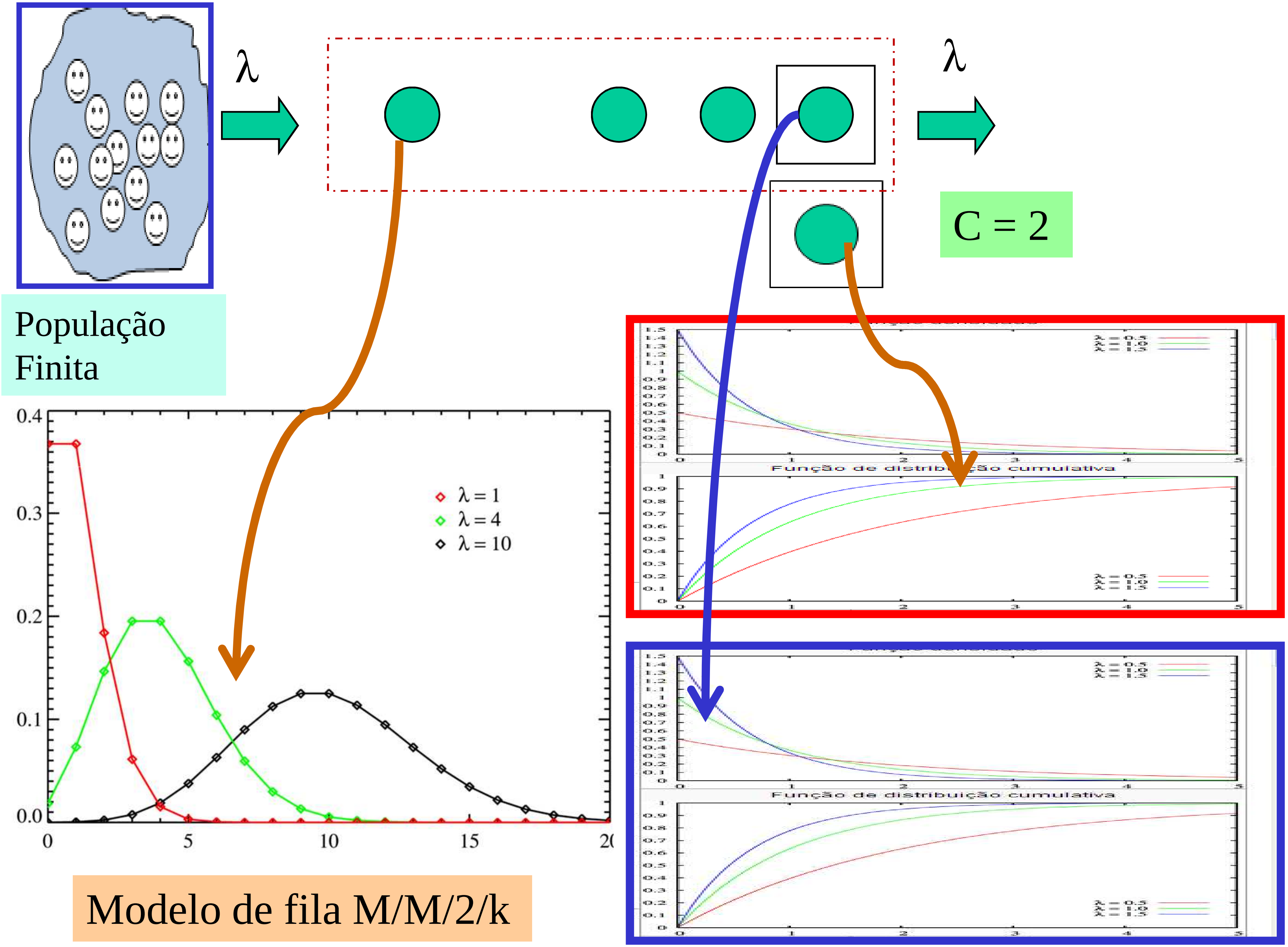
C	Fabricação λ=25 e	μ=15	Inspeção λ=25 e	μ=30	Reparo λ=(0.2)*25 e	μ=20
	ρ	NF	ρ	NF	P	NF
1	-		0,83	4,16	0,25	0,09
2	0,83	3,5	0,41	0,2		
3	0,55	0,5				

Conclusão: A quantidade de servidores que atende à solicitação é:

Produção = 3; Inspeção 2 e Reparo = 1.

O Modelo M/M/c: População Finita



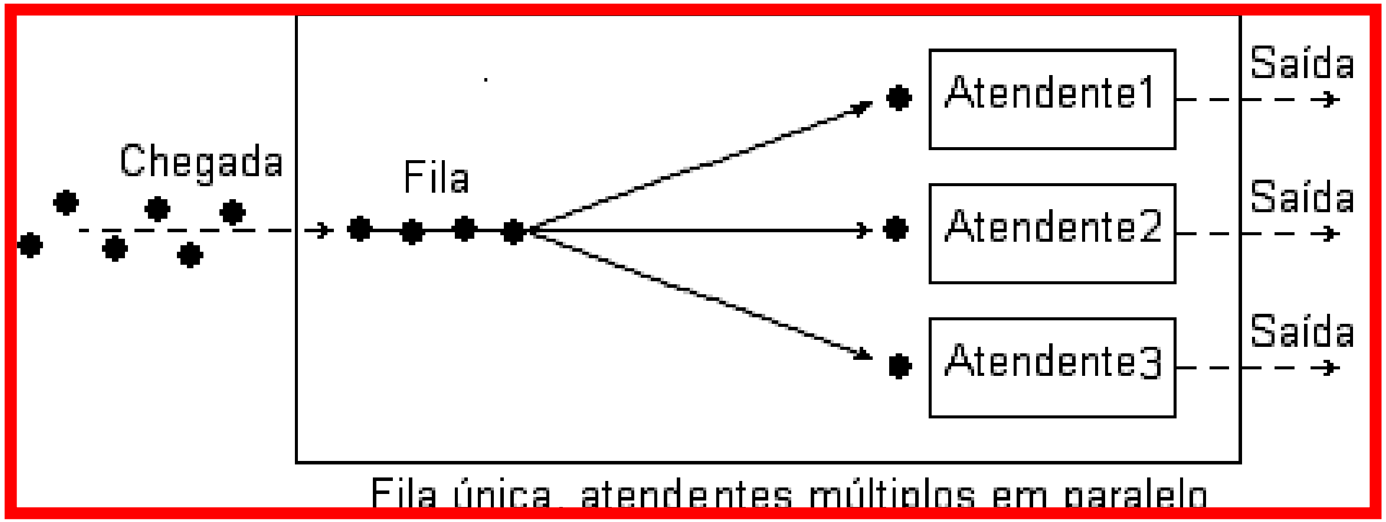

λ
λ
C = 2
População
Finita
λ = 1
λ = 4
λ = 10
Função de distribuição cumulativa
Função de distribuição cumulativa
Modelo de fila M/M/2/k

O Modelo M/M/c/k: População Finita

Analogamente as considerações anteriores para a população finita com um único atendente, podemos afirmar que também aqui ocorre o mesmo.

É comum encontrarmos situações de múltiplos atendentes com população finita.

A tabela a seguir apresenta as fórmulas das diferentes variáveis.



O Modelo M/M/1/k: População Finita

Nome	Descrição	Fórmula
ρ	Taxa de utilização do sistema	$\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$
r	Relação entre a taxa de chegada e a taxa de atendimento	$r = \dfrac{\lambda}{\mu}$
P_0	Probabilidade de nenhum usuário do sistema	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{r^n}{n!} + \dfrac{r^c (K - c + 1)}{c!} \right]^{-1} \xrightarrow{se} \dfrac{r}{c} = 1$

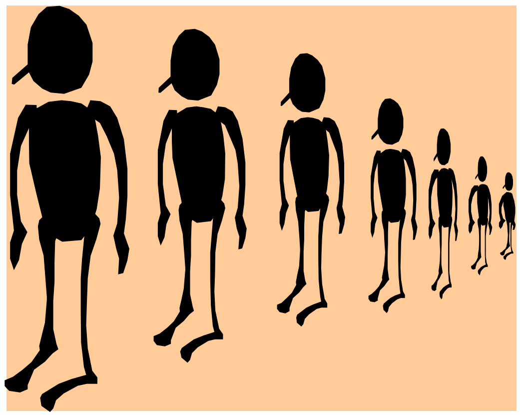
O Modelo M/M/1/k: População Finita

		$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c \left[1 - \left(\frac{r}{c} \right)^{K-c+1} \right]}{c!(1 - \frac{r}{c})} \right]^{-1} \xrightarrow{se} \frac{r}{c} \neq 1$$
P_n	Probabilidade de n usuários no sistema	$$P_n = P_0 \frac{r^n}{n!} \xrightarrow{se} 1 \leq n \leq c-1$$ $$P_n = P_0 \frac{r^n}{c^{n-c} c!} \xrightarrow{se} c \leq n \leq K$$
L	Número médio de usuários no sistema	$$L = Lq + c + \sum_{n=0}^{c-1} (n-c) P_n$$
L_q	Número médio de usuários na fila	$$L_q = \frac{P_0 r^c}{c!} \frac{(K-c+1)(K-c)}{2} \xrightarrow{se} \frac{r}{c} = 1$$ $$L_q = \frac{P_0 r^{c+1}}{c!c} \frac{\left[\left(\frac{r}{c} - 1 \right) (K-c+1) \left(\frac{r}{c} \right)^{K-c} + 1 - \left(\frac{r}{c} \right)^{K-c+1} \right]}{\left(1 - \left(\frac{r}{c} \right) \right)^2} \xrightarrow{se} \frac{r}{c} = 1$$
W	Tempo médio de esperado sistema	$$W = \frac{L}{\lambda(1 - P_{K})}$$
W_q	Tempo médio de espera na fila	$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_{K})}$$

Tabela 5 - Principais indicadores de desempenho do modelo M/M/c/K/FIFO

O Modelo M/M/1/k: População Finita

Tendo em vista a **complexidade matemática**, **não iremos nos estender nesta abordagem**, a qual pode, entretanto, ser **vista com simplicidade na técnica simulação de sistemas** que será abordada no próximo capítulo



O Modelo M/Em/c: População Infinita

- O **modelo M/Em/c** as chegadas seguem uma distribuição **POISSON** e o atendimento segue uma distribuição **ERLANG** de grau m.
- Os pesquisadores comentam que este modelo apresenta melhores resultados que o modelo M/M/c.
- Apresentam uma **complexidade matemática e o cálculo** dos diferentes **parâmetros de uma fila** podem ser **apoiados por gráficos.**
- A **Teoria das Filas** foi **criada por A. K. Erlang** e esta função **leva seu nome como homenagem.**

Distribuição do tipo Erlang

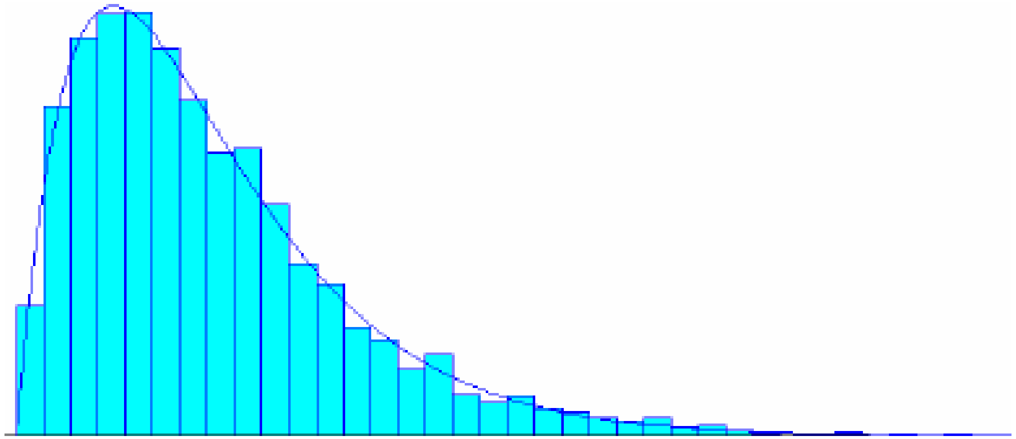


Figura 8 - Histograma de uma distribuição do tipo Erlang

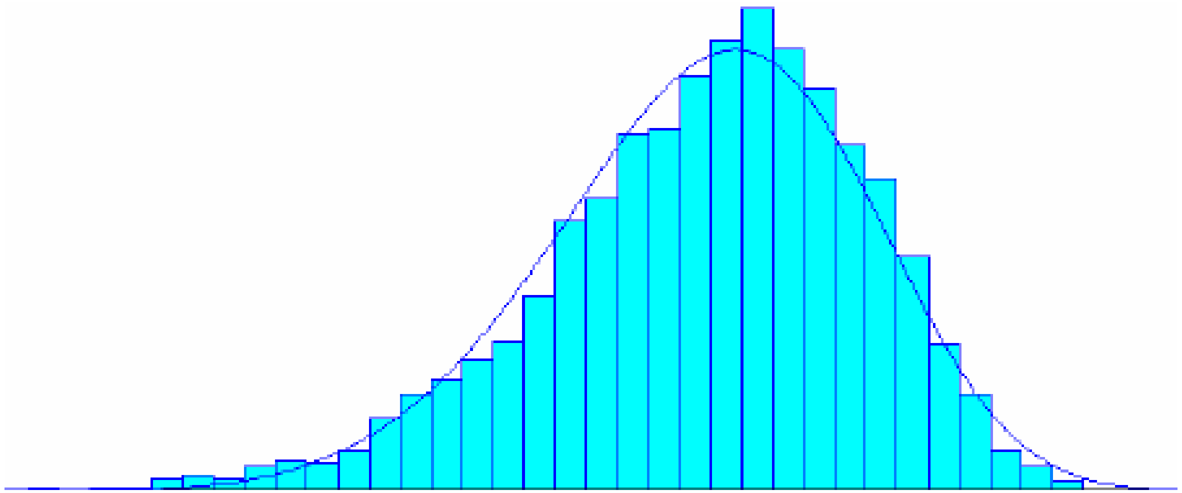
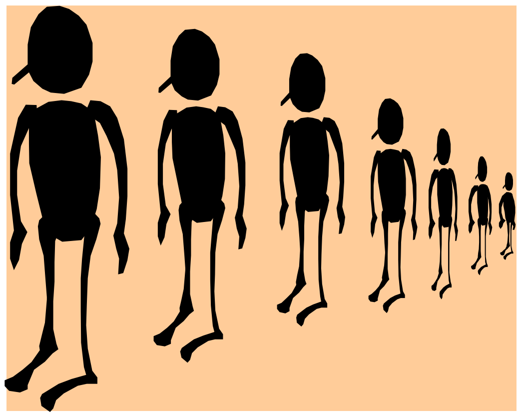


Figura 9 - Histograma de uma distribuição do tipo Erlang

O Modelo M/Em/c: População Infinita

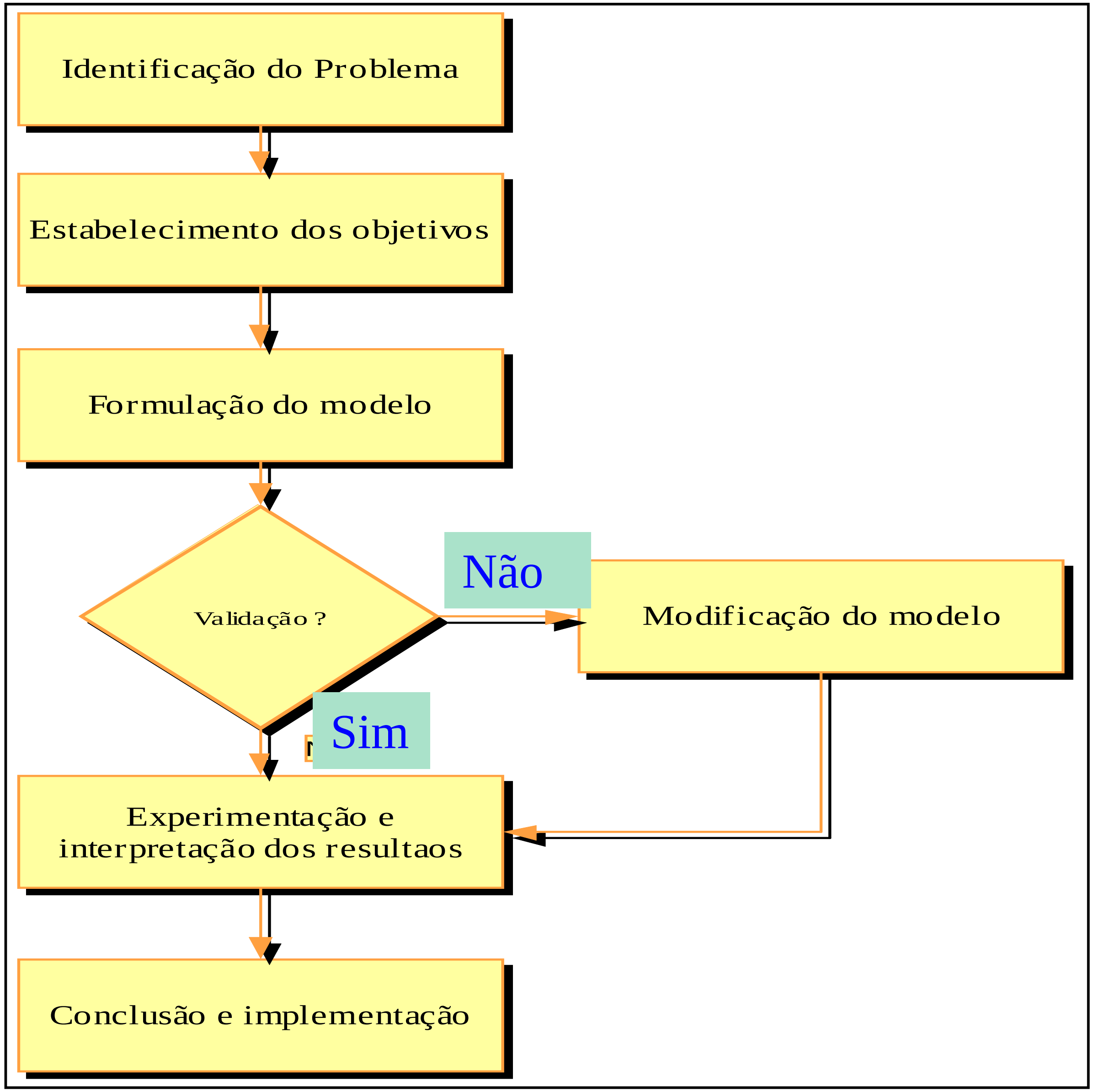
Tendo em vista a **complexidade matemática**, **não iremos nos estender nesta abordagem**, a qual pode, entretanto, ser **vista com simplicidade na técnica simulação de sistemas** que será abordada no próximo capítulo



SIMULAÇÃO DE SISTEMAS

- O processo da Simulação
  - Coleta e preparação de dados
  - Estabelecimento dos objetivos
  - Construção e formulação de modelos.
  - Tradução do modelo
  - Experimentação
  - Análise e interpretação

SIMULAÇÃO DE SISTEMAS



- Foram apresentados diversos softwares de **Simulação** e outros que apóiam a Teoria das Filas no **Exercício 1**;

- A partir da próxima aula estudaremos **SIMULAÇÃO** com o apoio da ferramenta ARENA

Exercício 1: Item 3 (*softwares*)

1. PROMODEL → Eduardo
2. FLEXSIM → Mateus
3. EXTEND → Ezequiel
4. MICROSAINT → Alexandre
5. SCIFORMA PROCESS → Cleber
6. SIMPROCESS → Dyeison
7. GOLDSIM → Rubmar
8. CRYSTAL BALL → Sara
9. IBM WebSphere Business Modeler Advanced → Lucas
10. Oracle Business Process Management → Gerônimo
11. TIBCO → Wilson
12. BIZAGI → Priscila
13. AUTOMOD → Fabio
14. VISSIM → Gilson
15. STELLA → Guilhermo
16. Aris Express → Murilo
17. Software AG

Exercício 1: Item 3 (*softwares*)

16. Aris Express → Murilo
17. Software AG
18. Dymola
19. AnyLogic → Daniel
20. EcoSimPro
21. SimCreator → Monique
22. SimLox
23. SIMSCRIPT III
24. SIMUL 8 → Gabriel

UMA COLEÇÃO DE FERRAMENTAS DE SIMULAÇÃO

Exercício 2: Itens 9 e 10

7/04/2010

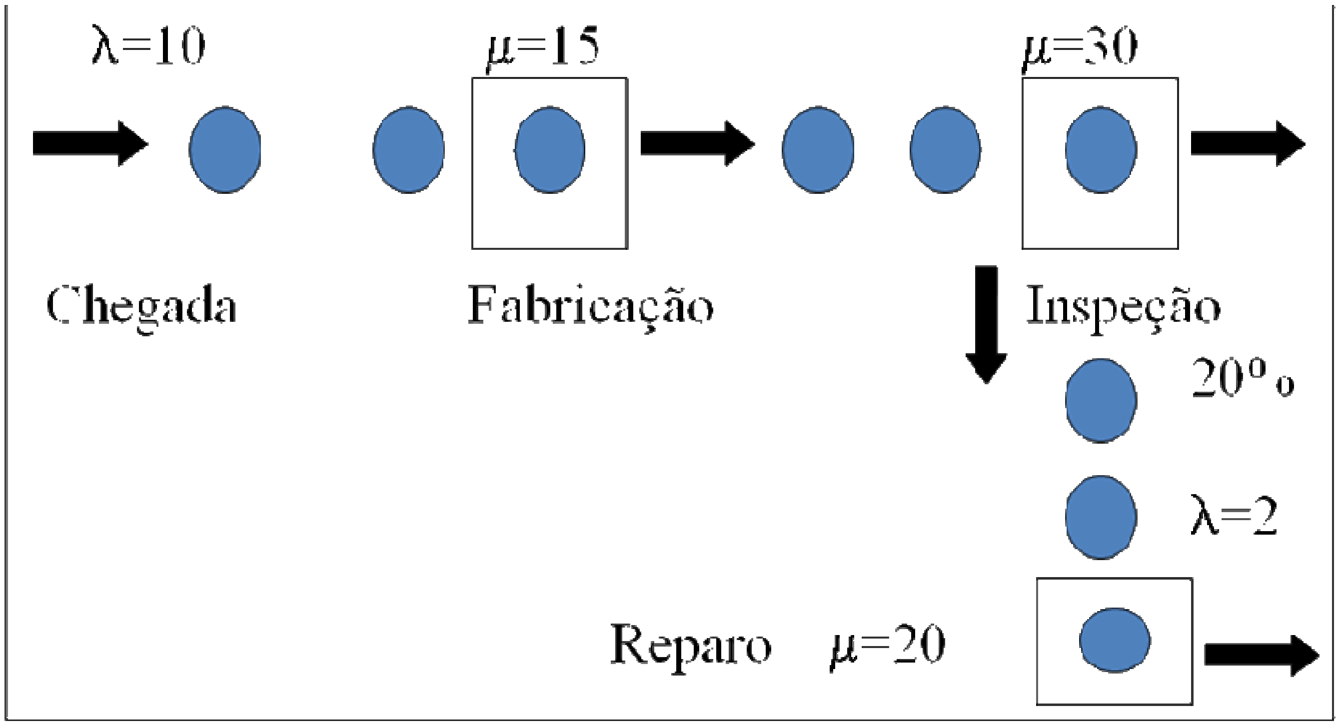
Exercício 2: Item 9

Uma fábrica possui um depósito de ferramentas onde os operários vão receber as ferramentas especiais para a realização de uma determinada tarefa. Verificou-se que o ritmo de chegada (λ = 1,2 chegada/minuto) e o ritmo de atendimento(μ=1,6 atendimentos por minuto) seguem o modelo Marcoviano. A fábrica paga $69,00 por hora ao atendente e $99,00 ao operário. Pede-se: Acrescentar diversos atendentes até chegar ao custo mínimo.

c	ρ	NS	Custo dos atendentes [$]	Custo dos operários [$]	Custo total [$]
1					
2					
3					
4					
5					

Exercício 2: Item 10

No sistema de filas seqüenciais descrito na figura abaixo, admita que o ritmo de chegada tenha crescido para λ=30 peças por minuto, calcule a quantidade de servidores de cada estação de trabalho tal que o tamanho da fila correspondente (NF) seja menor que 1.



C	Fabricação λ= e	μ=	Inspeção λ= e	μ=	Reparo λ= e	μ=
	ρ	NF	ρ	NF	P	NF
1						
2						
3						
4						

Prova Escrita da Disciplina: 5/05/2010

Matéria: Conteúdo lecionado até uma semana antes da prova

Acompanhamento dos Exercícios

Exercício	Itens	Data
Exercício 2	1 e 2	3/03/2010
Exercício 2	3	10/03/2010
Exercício 2	4 e 5	17/03/2010
Exercício 2	6, 7 e 8	24/03/2010
Exercício 1	Entrega e apresentação	31/03/2010
Exercício 2	9 e 10	7/04/2010
Exercício		14/04/2010
Feriado Nacional	Tiradentes	21/04/2010
Exercício		28/04/2010
Prova escrita	Conteúdo lecionado até 28/04/2010	5/05/20010